

سلسله انتشارات انجمن آثار ملی

شمارهٔ ردیف ۳۵

استفادهٔ دانشمندان مغرب زمین از جبر و مقابلهٔ خیام

نگارش

دکتر جلال مصطفوی

دکتر در طب - مهندس شیمی

تهران ۱۳۳۶ شمسی

استفادهٔ دانشمندان مغرب زمین

از جبر و مقابلهٔ خیام



تألیف

دکتر جلال مصطفوی

دکتر در طب ـ مهندس شیمی

چاپ تابان





تقریظی است که آقای دکترمحسن هشترودی استاد دانشگاه
ورئیس دانشکدهٔ علوم براین رساله مرقوم داشته‌اند

رسالهٔ حاضر تحقیقی‌است در تتبعات خیام راجع به جبر درمورد حل‌معادلات درجهٔ سوم . ــ انجمن‌آثار ملی‌درانتشار چنین رسالاتی دینی را که معاصرین‌درحق گذشتگان بر گردن دارند ادا مینماید و خدمتی مأجور و در خـور تقدیر انجام میدهد .

تدوین رساله راآقای دکترمصطفوی که درتاریخ‌علوم سوابق خدمت‌شایانی دارند برعهده گرفتند ، ودر انجام آن حق مطلب را ادا کرده‌اند . با اینکه شغل شاغل‌ایشان‌طبابت‌است‌بااطلاعات‌وسیعی که درعلوم خصوصاً‌مهندسی شیمی‌دارنددر زنده کردن تاریخ گذشته‌ای که غالب هموطنان‌ازآن بی‌خبرندایرانیان رابریکی ازافتخارات‌علمی گذشتهٔ خویش آگاه ساخته‌اند . در بادی امرچنین بنظرمیرسد که‌اقدام دراین کاربرعهدهٔ اساتید علم ریاضی میبایستی محول شده باشد ؛ اما کار تحقیق‌تاریخ جز بررسی‌فنی وعلمی‌است و رسالهٔ حاضر ازاین نظربسی ارزش‌دارد، چه‌آقای دکتر مصطفوی چنانکه اشاره شد ازمبانی علوم ریاضی وفیزیك و شیمی بخوبی آگاه‌اند ودرتدوین وترتیب رساله تنهابه تألیف صوری قناعت نکرده‌انـد بلکه درابواب رساله ، تحقیقی ماهوی نیزانجام داده‌اند . طبیب دانشمند ودوست ارجمند من‌ازمن خواستند که‌براین رساله مقدمه‌ای تنظیم کنم ومن رواندیدم که تقاضای‌دوست خودرابدینصورت بپذیرم، چه رساله موقعیکه منتشرشدخود گویای مطلبی است که من بیهوده درآن اطالهٔ کلام میتوانم کرد وچنین صلاح دانستم که

مقدمه شامل قدردانی ومعرفی طبیبی باشد که باانجام خدمت اجتماعی خویش که با حذاقت ومروت وباوجدان پاك صورت میگیرد ، سالیان درازی است که دراحیای تاریخ دانشمندان گذشتهٔ ایران میکوشند واوقات فراغت خودرا در مطالعات علمی وتاریخی که گاهی باغوامض ومشکلات روبروست مصروف میدارند . شماره های مجلهٔ دنیای علم حاصل زحمات چندین سالهٔ طبیب دانشمنداست واینك بر تدوین این رسالههمت گماشتهاند ونتیجهٔ کوششهای ایشان بصورت این رسالهٔ مختصر تقدیم هموطنان میگردد. روح پرفتوح حکیم نیشابوری دراین کار، فیض بخش ومددکار ایشان بوده است ودرسهیا چهار جلسهای که لذت گفتگو وبحث باایشان درکاراین رساله یامطالب علمی دیگر دستداد فریفتگی ودلدادگی ایشان را درروشن کردن تاریخ علوم بطورعام وخصوصاً درحق دانشمندان این مرز وبوم دریافتم وارادتو محبت مرادر حق ایشان استوارتر وپا برجاترساخت. امیدوارم که دراین خدمتها همواره کامیاب باشند وایزد متعال پیوسته یارو مددکار ایشان باشد .

تهران جمعه ٦ آبانماه ١٣٣٨ دکتر محسن هشترودی

سپاسگزاری

از دانشمند عالیمقام آقای دکتر محسن هشترودی استاد دانشگاه ورئیس دانشکدهٔ علوم که علاوه بر استادی مسلم درعلوم ریاضی ، در فلسفه وادبیات نیز مقام شامخی دارند و حقّاً یکی از مفاخر بزرگ علمی وملّی ما بشمار میروند ، و پیوسته نگارنده را در مطالعات علمی رهبری وتشویق میفرمودهاند صمیمانه سپاسگزاری مینمایم . اینکه تقریظی بر رسالهٔ حاضر نوشته وبخدمت ناچیز بنده ارزشی دادهاندمایه کمال سربلندی است.

***

از دانشمند گرانمایه آقای دکتر غلامحسین مصاحب استاد ریاضیات از دانشگاه کمبریج انگلستان وصاحب تحقیقات ومطالعات عدیده و مؤلف کتاب «جبر ومقابلهٔ خیام وتاریخ علوم ریاضی» که در تنظیم این رساله از آن کتاب فایدهٔ فراوان بردهام ، مراتب حقشناسی خود را ابراز میدارم.

مقدمهٔ مؤلف

غیاث‌الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیامی معروف به خیام یکی از بزرگترین دانشمندان ایران در قرن پنجم هجری است که در علوم ریاضی و فیزیک و نجوم سرآمد اقران بوده واز نظر اکتشافاتی که در علم جبر ومقابله مخصوصاً حل معادلات درجهٔ سوم وطبقه‌بندی منظم و بحث و تحقیق در این معادلات داشته است ، در تاریخ علوم شخصیت وموقعیتی بس ارجمند پیدانموده واز این لحاظ میتوانیم او را حقاً یکی از بزرگترین دانشمندان شرق بشمار آوریم .

متأسفانه اهمیت وارزش مقام علمی این دانشمند عالیقدر نه تنها بر مردم ایران بلکه بر سایر ملل جهان نیز کم و بیش مجهول و اکتشافات ریاضی اوحتی بر ریاضی- دانان نیز مکتوم مانده‌است ؛ زیرا شکی نیست که معرفی دانشمندان قدیم یك کشور و تحقیق در کار های علمی آنان ، از نظر حفظ شعائر ملی و اثبات حقی که دانشمندان مزبور در پیشرفت وسیر تکاملی علوم دارند ، در وهلهٔ اول از وظایف خاصهٔ مقامات فرهنگی ودانشگاهی کشوری است که زادگاه ومحل زندگی آن دانشمندان بشمار میرود ، وبا کمال تأسف باید اقرار کنیم که دانشگاه تهران و وزارت فرهنگ نه تنها دربارهٔ خیام بلکه برای شناساندن سایر دانشمندان بزرگ قدیم ایران که قرنها مشعل علم را در سراسر جهان فروزان داشتند تا کنون اقدامات شایسته‌ای که درخور مقام وشخصیت علمی آنان باشد انجام نداده‌اند .

ازطرف دیگر تقریباً از سی سال باینطرف کتابهائی در ایران بطبع رسیده و همه جا پراکنده شده‌است که هدف ومنظور آنها بزرگ جلوه دادن دانشمندان مغرب زمین و تحقیر دانشمندان قدیم بوده وهر کس این کتابهارا بخواند سخت تحت تأثیر قرار گرفته وچنین تصور میکند که عقاید قدماً وافکار علمی آنها کودکانه وغلط وباطل بوده وعلم بمعنای واقعی خود درحقیقت از اروپا سرچشمه گرفته‌واز

قرن شانزدهم وهفدهم نورخودرا بهمه‌جای‌دنیا پراکنده نموده است. ناچارباچنین طرز تفکر ومخصوصاً باتوجه بمشکلات روزافزون زندگی و عدم استقبال عمومی بتحقیقات‌علمی واینکه درمحیط ما کوچکترین تشویقی ازارباب فضل وعلم بعمل نمیآید ، چه کسی حاضر خواهد شد که یکعمر رنج مطالعه برخود هموار کرده ، درمقام بررسی وتحقیق درمعتقدات دانشمندان قدیم برآید ، واصول ومبانی‌علوم را باآنچه که‌امروزه در کتابها مندرج‌است مورد مقایسه وسنجش قرارداده وثابت کند که پایه‌های علوم کنونی بردوش دانشمندان قدیم بوده وآنها طی‌قرنهازحمت ومرارت وبا استفاده ازهوش ونبوغ سرشارخود موفق شدند طرحی چنان متین و محکم برای دانش‌ها بریزند که‌مرورزمان بهیچوجه نتوانسته است خدشه درارکان آنها بیندازد وبطورمسلم دانشمندان قدیم ایران درایجاد این طرح نقشی‌مؤثرتر ومهمتر ازدانشمندان سایرملل جهان قدیم داشته‌اند . فی‌المثل کدام ریاضی دان ایرانی است که بداند اساس‌علم جبرومقابله که امروزدردبیرستانهای دنیا تدریس میشود همان‌است که محمدبن‌موسی‌خوارزمی درقرن‌سوم هجری طرح ریزی کرده وگرچه دانشمند مزبوروارث مقام علمی ریاضی دانان ازمنهٔ پیشین است که در کشورهای‌مختلف دنیای قدیم وجودداشته‌اند، ومخصوصاً ازجبر دیوفانتوس‌استفاده نموده است ، معهذا قضایای علمی او ازحیث تنظیم وطبقه بندی واستحکام اصول و مبانی بهیچوجه قابل مقایسه بامطالبی که سایر دانشمندان قدیم راجع باین علم بطورناقص ومبهم ومجمل در کتابهای خود شرح داده‌اند نیست . البته‌منکر نیستیم که‌هیچ‌فرد وهیچ‌ملتی به‌تنهائی‌واضع یك‌علم نبوده ونمیتواندباشدبلکه‌دانشمندان عموماً مطالب علمی را ازدانشمندانی که برآنها مقدم هستند اخذ میکنند ؛ ولی همانطور که مثلا نابغه‌ای همچون پاستور بااستفاده ازعلومی که دانشمندان ازمنهٔ گذشته برای او بمیراث گذاشته وحتی موجودات ذره‌بینی را نیز قبل‌از او کشف کرده وکلمهٔ میکروب را هم نامگذاری نموده بودند معهذا واضع علم میکروب‌شناسی بشمارمیرود ، بهمین طریق محمدبن موسی‌خوارزمی را نیز بایدبنیان گذار علم جبرومقابله‌ای دانست که امروزدرهمه‌جای دنیا بطور کلاسیك تدریس‌میشود؛

نا گفته نماند که هنوز صدسال ازمرگ پاستور نمیگذرد ، درحالی که میکروب شناسان بزرگ دراین یکقرن بتدریج ثابت کرده‌اند که آن دانشمند نابغه‌درموارد عدیده بواسطهٔ عدم توجه به بعضی حقایق مرتکب اشتباهاتی شده است ، ولی این امر که برای کلیهٔ دانشمندان دنیا عمومیت دارد ذره‌ای ازاهمیت مقام علمی پاستور نمی‌کاهدوبرای همیشه کشورفرانسه بخود فخرمیکند که دانشمندی همچون پاستور بدنیا عرضه کرده است ، وهمواره درتجلیل اومیکوشد ومجسمه ها ازاوبرپامیسازد وهنوزهم مؤسساتی را باسم پاستورنامگذاری میکنند ، زیرا تجلیل از مقام علمی دانشمندان اعصار گذشته یا حال علامت زنده بودن یك ملت و نشانهٔ اهمیتی است که یك کشورمتمدن برای علم ودانش قائل است .

ذکراین مطلب برای این بود که : اگر محمد بن موسی خوارزمی یا خیام ویادیگردانشمندان قدیم‌ایران‌توجه‌ببعضی‌حقایق که امروز برجهانیان معلوم‌است نداشته‌اند نباید بآنها خرده گرفت و آنانرا بدیدهٔ حقارت نگریست بخصوص که فاصلهٔ زمانی برای‌مقایسه بین دانشمندان ادوارمختلفهٔ‌تاریخ‌اهمیت فراوانی دارد ؛ بنابر این دانشمندان هزارسال قبل را از نظرمیزان معلومات بـا دانشمندان‌امروز مقایسه کردن و آنانرا بواسطهٔ کمتربودن اطلاعاتشان تحقیرنمودن ازدیدهٔ انصاف وعدالت بدوراست . برعکس اگر معلوم شود که دانشمندان قدیم پایه های علم‌را بر اساسی چنان محکم استوار نموده‌اند که گذشت زمان طی قرنها نتوانسته است رخنه درارکان آن بیندازدباید برهوش و نبوغ چنان دانشمندانی آفرین گفت ، و آنانرا همواره بدیدهٔ احتـرام نگریست ، زیرا بقول جرج سارتن استاد معروف تاریخ علم :

« هیچ‌چیز دشوار تر ازآغاز نهادن وپی افکندن‌نیست ، و هیچ کار اساسی تر از بنیاد نیکو نهادن نمیتوان یافت . زیرا که تمام ساختمان برروی پی‌های آن استوار است » .

ثانیاً برمانیز همانطور که درکلیهٔ کشورهای زندهٔ دنیا معمول میباشد واجب است که درمعرفی شخصیت علمی دانشمندان قدیم خود بکوشیم ، چه از اینراه دو

نتیجهٔ بزرگ‌ بما عاید خواهدشد : یکی اینکه حق مسلم دانشمندان قدیم ایران نسبت بجهان‌علم و پیشرفت تمدن ادا گردیده ؛ ودوم اینکه تکانی‌دردانشجویان جوان که رجال‌آتیهٔ کشور وچشم‌وچراغ این‌مملکت بشمارمیروند پیداخواهدشد زیرا مطالعه درآثارعلمی گذشتگان هیجانی درذهن ایجاد کرده وحس ابتکار و ابداع رابر انگیخته وراه رابرای کشف مطالب تازه‌باز میکندومحققاً بسیاری‌از اکتشافات عامی ازهمین راه‌پیداشده‌است .برای تأیید مطلب به گفتهٔ جرج‌سارتن استناد میکنم که در کتاب «سر گذشت علم» (ترجمه آقای احمد بیرشك) چنین مینویسد :

« هنوز مطالعهٔ آثار ارسطو ودیوفانتوس (۱) وهویگنس (۲) ونیوتن بسیار نافع است وآن آثارمشحون ازخزائن علمی‌پنهانی‌است . اشتباه بزرگی استاگر فکر کنیم که در آثار مذکور جزآنچه تابحال درك‌وبیان شده استمطلب‌دیگری نیست . البته اگرچنین بود مطالعهٔ‌آنها فایده‌ای‌نداشت‌وفقط بیان‌فهرستی‌ازحقایق وعقاید گذشته کفایت میکرد ، ولی چنین نیست و من بآنان که منکرند توصیه میکنم بدقت دراین امرغور کنند تابببینند که برای فکرهیچ‌چیز مهیج‌ترازدست یافتن بمنابع ومآخذنیست ».

ودر جای دیگر مینویسد :

« تاریخ علوم ازحیث زمان ارزش بسیار دارد ، بخصوص اگر بوسیلهٔ کسی نوشته شود که‌هم‌با جنبه‌های علمی‌جدید وهم‌با اصول‌علمی قدیم آشنائی‌کامل‌داشته باشد . توالی کشفیات سابق همان توالی‌را به‌عالم محقق ومتتبّع تلقین‌میکند و وی را بکشف‌های جدید نائل‌میسازد . میتوان روش‌های قدیمی ومتروك‌را بازبردستی تغییرداد و ازآنها نتایج‌عملی گرفت . این‌مطلب اگرخوب‌فهمیده‌شود تاریخ‌علوم بیك روش تحقیق تبدیل‌میشود ».

از آنچه ذکرشد اهمیت بررسی وتحقیق درکارهای علمی خیام ، مخصوصاً

Huygems (۲)   Diophantus (۱)

جبر ومقابله که اساس‌ریاضیات بشمارمیرود واضح‌وآشکارمیگردد ، بویژه‌باتوجه باینکه ریاضیات پایه ومحور کلیهٔ‌علوم‌میباشد ، واین علوم نیز مبنای تمام ترقیات بشر وپیشرفت تمدن و انقلابات صنعتی و بالنتیجه باعث تفوق مللی که تمدنشان عالیتراست بر ملل‌دیگر میباشد . جای‌بسی‌شگفتی ودرعین‌حال تأسف‌وتأثراست که تاکنون هیچ‌مقامی درصدد احیای این‌آثار علمی که متضمن آنهمه نتایج درخشان میباشد برنیامده،ودرعوض‌خیام‌را باتبلیغات‌عجیبی‌در دنیا بنام‌یك شاعرمی‌پرست و فیلسوف بیدین معرفی کرده‌اند . رباعیات مجعولی راکه ابداً بخیام مربوط نیست بآن دانشمند بزرگ نسبت‌دادن وآنهارا بتمام زبانهای زندهٔ دنیا ترجمه کردن ودر کتابهائی باکاغذ وجلد اعلی‌بچاپ رساندن و تصاویر رنگی بسیار زیبا که‌صحنه‌هائی ازمی ومعشوق ومستی و بیخبری در نظر مجسم میسازد بهرصفحه ازکتاب افزودن، و ازراه‌نشر آن روح لاابالیگری و سستی وپشت پا زدن بدنیا وشرابخواری‌وعیاشی درمردم دمیدن معلوم نیست ازکجا سر چشمه گرفته و چه منظورهائی ازآن داشته‌اند .

متن اصلی‌رسالهٔ جبر ومقابلهٔ خیام بزبان‌عربی در کتابخانه های معتبردنیا موجوداست . هرکس این‌رساله را مطالعه‌کند بخوبی‌پی‌خواهد برد که خیام‌مردی دیندار وموحد ومعتقد به مبداءِ ومعاد بوده ،زیرابا اینکه رسالهٔ اوصرفاً جنبهٔ علمی‌دارد معهذا چندین بار ضمن بحث از قضایای ریاضی ، از خدا یاد میکند و در جاهائی باخلوص نیت از او استمداد میطلبد .کسانی اگر میخواهند صحت‌این مدعا را دریابند به کتاب«جبرومقاله خیام»تألیف‌آقای دکتر غلامحسین‌مصاحب که‌درقسمتی‌ازآن‌ترجمه جبرومقابلهٔ‌خیام بنظرمیرسد مراجعه‌فرمایند .

درصفحهٔ ۲۲۳ مقدمهٔ فصل چهارم چنین مینویسد :

«حمد خداراست وانجام نیك پرهیز کاران‌را وجوروستم آنانرا که‌ازحدود خود تجاوز کنند ودرود پیغمبران را مخصوصاً محمد ص‌وجمیع‌خاندان پاك او.- یکی از رشته‌های‌علوم که .....الخ».

ودرصفحهٔ ۲۲۵ :

«......واینکار را باتعدید اصناف مذکوره از مقدمات جبری شروع نمودم زیرا ریاضیات بتقدیم سزاوار تراست؛ودراینکار از توفیق الهی مدد جستم و امیدوارم مرا موفق فرماید ،تا تحقیق نتایج بحث های علمی خود و پیشینیانم را که از دیگر مطالب مهمتر است بآن ملحق سازم، واز خداوندمسئلت میکنم که مرا از جمیع خطایا محفوظ دارد، چواودعوت بندگان را اجابت میکند .باو توکل میکنیم و بازگشت ما بسوی اوست ».

ودرهمان صفحه :

«جزءِ اول -۱- بیاری خداوند و توفیق کامل او چنین گویم .فن جبر و مقابله فنّی است علمی ....الخ».

ودرصفحه ۲۳۰ :

«....عنقریب یك یك این اصناف ۲۵ گانه رابا برهان حلّ آنها خواهیم آورد ودر این کارازخداوند کمك میجوئیم،چوهر کس ازروی اخلاص باوتوکل کنداو را هدایت نموده ازدیگران بی نیازمیکند ».

ودرصفحهٔ ۲٦٤ :

«چون کلام باینجارسیدرساله رابحمدخدایتعالی ودرود برجمیع پیغمبرانش ختم میکنم» .

خیام پس از ختم رساله مطالبی نیز راجع به کارهای ریاضی ابوالجود مینویسد که درحقیقت دنبالهٔ رساله محسوب میشود ودرآنجا نیز در صفحهٔ ۲٦٥ مینویسد:

«.... کسی که مطالب این رساله رادریابد هر مسئلهٔ خاصی را که بخواهد میتواند حل کند؛ خداوند است که مارابدریافت حقیقت توفیق میدهدودرهرحال اعتمادما بر اوست ».

ودرجای دیگر مینویسد :

« خداوند است که میتواند گره از این مشکلات بگشاید بمنه و کرمه »

وبالاخره در آخر رساله مینویسد : « حمد تنها خداوندرا سزاست ولطف او همه را کافی است وسلام او بربندگان برگزیده اش باد ».

اکنون انصاف دهید آیا سزاوار است بچنین دانشمندی که حتّی در یك رسالهٔ ریاضی همه جا تکیه کلامش حمد خدا و درود به پیغمبر است این رباعی و نظایر آنرا نسبت دادن :

ابـریق مـی مرا شکستی ربّی برمن درعیش را ببستـی ربّـی
من می خورم و تو میکنی بد مستی خاکم بدهم مگر تو مستی ربی

خوشبختانه استاد محمد مشکوة که از طرف انجمن آثار ملی بنشر قسمتی از شرح حالات حکیم عمر خیام خواهند پرداخت مدارکی در دست دارند که که نشان میدهد خیام نه تنها بیدین و خدا نشناس نبوده بلکه حتـی در زمـرهٔ اولیا الله نیز بوده است . ونیز استاد جلال الدین همائی کـه از طرف انجمن مزبور بنشر قدیمی ترین نسخهٔ رباعیات خیام اقدام خواهند نمود با تحقیقات حکیمانهٔ خود حق مطلب را دربارهٔ آن دانشمند گرانمایه ادا خواهند کرد.

در خـاتمه لازم میدانـم. از انجمن محترم آثارملـی که صادقـانه در راه احیای نام بزرگان قدیم ایران و نشر آثار علمی آنان میکوشد صمیمانه سپاسگذاری نمایم . امیداست مؤسسات علمی و فرهنگی ما نیز اقدامات گرانبهای انجمن آثارملّی را سرمشق و نمونه قرار داده و مخصوصاً دانشگاه تهران که مشعلدار علم در کشور است باین امر حیاتی و بزرگ توجه خاص مبذول دارد .



رسالهٔ حاضر که مورد مطالعهٔ خوانندگان محترم قرارخواهد گرفت شامل سه بخش میباشد :

بخش ۱ ـ علم جبر و مقابله متعلق به دورهٔ دانشمندان اسلامی قبل و بعد ازخیام ؛

بخش ۲ ـ اکتشافات خیام در جبرو مقابله ؛

بخش ۳ ـ استفاده دانشمنـدان مغرب زمـین از جبر و مقابلـه خیام

چون هدف اصلی نگارنده در تنظیم این رساله اینست که بدرستی معلوم نماید ، علم جبر و مقابله ای که امروز در در مـدارس دنیا تدریس میشود تا چه اندازه مدیون تحقیقات و کوششهای علمی دانشمندان قدیم ایران است و آنـان

چه‌حق بزرگی نسبت به پیشرفت علم و تمدن جهان داشته اند ، لذا روشی را که در تألیف این رساله بکار میبرد اینست که اصولا مطالب مندرج در کتابهـای جدید را با متن اصلی کتب ریاضی قدیم ایران تطبیق ومقایسه نماید. علت‌اتخاذ این تصمیم اینست که‌در کتب‌علمی جدید نه‌فقط هیچگونه انعکاسی ازاکتشافات دانشمندان قدیم ایران دیده نمیشود ،بلکه مطالب کتابهای جدید طوری تنظیم شده که دانش‌آموزان‌ودانش‌جویان وحتی‌بسیاری‌ازدبیران‌علوم ریاضی که‌منحصراً باکتب مزبور سروکار دارند تصور میکنند هرچه درآنها نوشته شده از اکتشافات اروپائیان است و دانشمندان قدیم هیچگونه سهمی در این مطالب علمی ندارند ، ولی ضمن مطالعه این رساله برقاطبهٔ دانش‌پژوهان روشن وآشکار خواهد شد که چه بیعدالتی در حق ایرانیان شده وچگونه‌اروپائیان یـك سلسله مطالب علمی را که‌نتیجهٔ عمرها کوشش‌وتحقیق ومطالعه شبانه روزی است از ایرانیان گرفته و با جزئی‌تحریف‌ومختصر تغییری بنام خودمعروف ساخته ودر دنیا پراکنده نموده‌اند واستادان و دبیران ریاضی قـرن اخیرایران نیز چون از علوم قدیمه بـی‌اطلاع بوده‌اند کتب ریاضی اروپارا ترجمه و تدریس کرده و ابداً متوجه‌این تغییرلباس نشدند .

ناگفته نماند که عامل بزرگ دیگری نیز برای اغفال معلمین جدیدوجود داشته است که‌آنان را نسبت بمطالعه وبحث و تحقیق دربارهٔ معلومات دانشمندان قدیم ایـران سست نموده ، وآن تبلیغات عجیبی است کـه از طرف کسانی در اطراف دانشمندان دوره رنسانس (قرن ۱۶ و ۱۷ میلادی) مخصوصاً دکارت در ایران بعمل آمده وهرکس کتابهائی که در این مورد بچاپ رسیده مطالعه کند بر او چنین‌وانمود میشود که معلومات قدما تماماً عاطل و باطل بوده و اساس و بنیان درستی نداشته‌است ، وبموازات‌این‌نشریه‌ها مقالات ورسالات متعدد دیگری نیز از نیم قرن اخیر باینطرف توسط‌نویسندگان زبردست همه جا پراکنده‌شده که در تمام آنها بطلان عقاید قدما راگاهی باعبارات تمسخر آمیز و زمانی بـا روایات بی‌اصل واساس در نظرها مجسم نموده ودر عین حال استحکام اصـول و

مبانی علمی اروپائیان ومقام شامخ ونبوغ دانشمندان آن قاره را درمغزهـا رسوخ داده واز اینراه ایجاد حس تحقیر درشخصیت هر فردایرانی وتبعیت کورکورانه وبلااراده از اروپائیان رادرایران بوجودآورده‌اند .

این ناچیز افتخار دارد که همین رساله مختصر بمنزله باطـل السّحری این تبلیغات زهر آگین رادرهم شکسته وحقایق اموررا بر عامهٔ مردم بویژه بردانش پژوهان آشکارخواهد ساخت. براستادان ودبیران علوم است که مطالب مندرج دراین رساله را همه‌جا نشر دهند وبدانند که وارث مقام علمی فضلا ودانشمندانی هستند که هنوز هم اروپائیان از خرمن علم و معرفت آنان خوشه چینی میکنند .



بخش یکم

جبر ومقابله دردورهٔ دانشمندان اسلامی

طبق تصدیق عموم مورخین دنیا سهم ایران وهنددرپیشرفت علـوم ریاضی مخصوصاً جبر ومقابله بیش از سایر ملل متمدنه قدیم است ولی ماچون ازآثار تمدن‌ایران‌دردورهٔ هخامنشی وحتی‌درزمان ساسانیان چیزمهمی دردست نداریم ، لذا از ذکر مطالب مربوط بآن زمــانها صرف نظر کرده و فقط بشرح تحقیقــات دانشمندان دورهٔ اسلامی که مدارك مثبته ای از آنها موجود است میپردازیم .
از بین معروفترین ریاضی دانان دوره مزبور نیز سر تن انتخاب کرده و اصول مطالب مندرج در کتب جبر ومقابله آنها را با مطالبی که‌در کتابهای جبر امروز نوشته‌شده‌است مقایسه میکنیم .این‌سه تن‌عبارتنداز :

۱ـ محمدبن‌موسی‌خوارزمــی نخستین ریاضــی دان معروف واز منجمین مشهوردورهٔ اسلامی بوده که‌وفاتش بین ۸۳۵ و ۸۴۵ مسیحی و کتاب جبرومقابلهٔ او قدیمی‌ترین کتابی‌است که در دورهٔ مزبور تألیف شده‌است. بوایه در تــاریخ ریاضیات خودمینویسد :

«این جبر که در نظر یك‌دانشمند بغداد ،درقرن نهم ،مقدماتی بوده‌هفتصد سال بعد مرجع ومدرك اروپائیان شده وتازمان‌ویت (Viète) (۱۵۴۰ ـ ۱۶۰۳) مبنای‌مطالعات علمی آنان‌بوده‌است .»

۲ ـ حکیم‌عمرخیام (۱۰۴۴ـ ۱۱۲۳ مسیحی) در رسالهٔ جبرومقابله خـود بحل معادلات درجهٔ‌اول و دوم و سوم پرداخته ومخصوصاً در تنظیم معادلات‌درجهٔ سوم وحل انواع مختلفهٔ آن که‌از اکتشافات مخصوص اوست‌بحث کرده‌است .

۳ـ غیاث‌الدین‌جمشیدکاشانی ـ که‌ازریاضیون ومنجمین‌معروف‌قرن‌پانزدهم

میلادی بوده محتملا در ۱۴۳۶ مسیحی وفات یافته است

مطالب مربوط باین بخش درسه گفتار مورد بحث قرارخواهد گرفت .

گفتار یکم

قاعده حل مسائل از راه جبر ومقابله

در این گفتار میخواهیم معلوم نمائیم که مسائل جبر ومقابله را امروز بچه طریق حل کرده وریاضی دانان قدیم ایران چگونه حل میکردند .

برای انجام این مقایسه باید مطالب مندرج در کتابهای جدید را بامطالب کتابهای قدیم تطبیق دهیم .

یکی از جدیدترین کتب جبر که بتازگی چاپ شده ودردبیرستان‌ها تدریس میشود دوجلد جبر برای سال دوم وسوم دبیرستانها تألیف آقایان :

قدرت‌الله پورفتحی ـ جلیل‌الله قراگزلو ـ هادی فرهی ـ صمصام‌الدین علامه نجم‌الدین طاهری ومه پاره ممقانی میباشد .

ونیز کتاب جبرومقاله برای سال چهارم طبیعی دبیرستانها تألیف آقایان :

موسی آذرنوش، احمد بیرشك وده مولف دیگر میباشد .

علاوه بر کتابهای فوق ، کتاب جبرومقابله تألیف مرحوم وحید که ۳۰ سال قبل چاپ شده است درسه جلد و کتابهای جبرومقابله تألیف «میرزارضاخان مهندس الملك معلم وممتحن کل ریاضیات عالی مدرسه مبارکهٔ «دارالفنون» که ۴۰ سال پیش چاپ‌شده ، وبالاخره کتاب «حکمت ریاضی در اصول علم حساب وجبرومقابله» از تألیفات مرحوم ناظم‌العلوم که ۵۰ سال پیش بطبع رسیده وهمه اینها برای دورهٔ اول ودوم دبیرستانها است .

نگارنده کلیه این کتابها را برای اینکه مورد استناد قرار گیرند دراختیار دارم .مقایسه مطالب کتابهای مزبور بایکدیگر نشان میدهد که درظرف ۵۰ سال اخیر هیچگونه تغییری ولوجزئی در کتب جبرومقابله‌ای که دردبیرستانها تدریس میشود پیدانشده واگر تفاوتی هست درپیش وپس کردن مباحث ومختصریا مفصل

شرح دادن مطالب و تغییر درواژه‌ها و اختلاف درامثله وشواهدمیباشد .

حال مطالب مندرج دراین کتابهارابامباحث مربوطه که‌در کتب جبرومقابله قدیم ایران وجوددارد مقایسه‌میکنیم :

قاعده‌ای که در کتابهای‌جدیدبرای حل‌مسائل‌فکری‌ازراه جبرومقابله معیّن گردیده‌بقرار زیراست :

حل‌هر مسئله مرکب است ازدوعمل مختلف : در عمل اول باید مسئله را بمعادله گذارد یعنی بواسطه‌معادلات روابطی‌را که‌مابین معلومات ومجهولات‌مسئله موجود است بیان نمود ،وپس‌ازآن عمل ثانی رابجای آورد یعنی‌معادله راحل‌نمود

۱ـ تبدیل مسئله بمعادله ـ برای‌انجام عمل اول‌یعنی تحویل مسئله‌بمعادله در کتابهای امروز چنین مینویسند :

«مجهول مسئله‌را بحرفی مانند x نموده وفرض میکنند که‌مقدار مجهول x معلوم‌باشد وسعی‌میکنند که‌ازروی فرض وشرایط مسئله اعمالی‌را که‌بجهة‌صحت مقدار x لازم است‌بنمایند، تساوی که‌بدین‌طریق بدست میآیدمعادله‌مسئله است .»

در کتاب «مفتاح‌الحساب» تألیف غیاث الدین جمشید کاشانی نیز دستوری برای حل مسائل از راه‌جبرومقابله در فصل اول از مقالهٔ پنجم ذکر شده است که درست بهمین مضمون میباشد وآن‌اینست :

«فاذاسئل مسئلة نفرض المجهول شیئا ونعمل علیه ما فهم عن کلام السائل ونسوقه بشروط المسئله علی ما یقتضی‌الحساب‌الی ان نعرف‌مقداراً منها باعتبارین یقال‌لهاالمتعادلان واذا انتهی‌العمل الی التعادل یقال له‌المسئلة‌الجبریّه» .

یعنی «اگرمسئله‌ای مطرح شود مجهول راشیئ [1] فرض کرده وبآنچه که

---

(۱) واضع کلمهٔ «جبرومقابله» محمد بن موسی خوارزمی است ، و پس‌ازآنکه کتاب جبر او از راه اسپانیا باروپا راه یافت کلمه جبر راکه خوارزمی الجبر نامیده بود تمام ملل اروپا بهمان اسم نامیده Algebre گفتند ، ومقدار مجهول‌را که خوارزمی «شیئی» نامیده بود عیناًبزبان‌اسپانیولی آورده وآنرا Xéi گفتند (x بزبان اسپانیولی ش تلفظ میشود) . بعدها برای سهولت و کوتاهی کلام فقط حرف اول این کلمه راگرفته مجهول را بحرف x نشان دادند ؛ پس اینکه میبینیم امروزه میگویند (مجهول‌را x فرض میکنیم) عیناً همانست که خوارزمی میگفته است (مجهول را شیئی فرض میکنیم) وشیئی بمعنی «چیز» است .

از مسئله استنباط میشود عمل نموده وشرایط مسئله را چنانکه در حساب معمول است اجرا میکنیم تامقدار آن‌از روی دوعبارت متعادل بایکدیگر بدست آیـد و همینکه معادله تشکیل‌شد آنرامسئله‌جبری‌نامند » .

توضیح ـ درجلد دوم جبر تألیف آقایان صمصام الدین علامه وغیره که‌قبلا ذکر کردیم راجع باین موضوع چنین مینویسد :

«مسئله راحل شده‌فرض نموده وهمچنانکه درحساب صحت جواب‌مسئله‌را امتحان میکنیم‌دراینجا نیز بهمین‌ترتیب‌عمل مینمائیم تا بین معلومات ومجهولات مسئله روابطی بنام معادله‌بدست آید وباحل این‌معادله جوابهای مسئله بسهولـت بدست میآیـد » .

در مطلب فوق جملهٔ «همچنانکه در حساب صحت جواب مسئله‌را امتحان میکنیم در اینجا نیز بهمین ترتیب عمل مینمائیم » مطابق است‌با جملهٔ «ونسوقه بشروط المسئله علی‌مایقتضی‌الحساب » که‌در کتاب غیاث الدین جمشیددیدیم : و جملهٔ :« تابین معلومات ومجهولات مسئله روابطی بنام معادلـه بدست آیـد » مطابق است باجملهٔ «الی ان نعرف مقداراً منها باعتبارین یقال‌لهاالمتعادلان » .
وبهر حال‌آنچه‌از کتابهای‌قدیم‌وجدید مفهوم‌میشود کاملایکی است ،واین‌میرساند که‌قاعده‌مزبور را متأ خرین عیناً از قدما گرفته‌اند .

۲ـ حل معادله ـ در کتابهای جبر جدید برای حل هر معادلـه یعنی پیدا کردن‌جواب یا جوابهای معادله نکاتی تذکر داده شده است که عبارتند از :

۱ـ بدو طرف معادله میتوان دومقدار مساوی اضافه ویا ازآن کم کرد؛

۲ـ بنا بخاصیت ۱ میتوان دو جملهٔ مساوی را از دو طرف معادلـه حذف کرد ؛

۳ـ میتوانیم جملات طرفین معادله را از طرفی بطرف دیگر ببریم بشرطی که علامت آنهارا تغییر دهیم ؛

٤ـ میتوان دوطرف معادلـه را در دوعدد مساوی (مخالف صفر) ضرب یـا برآن تقسیم کرد .

این نکات را تماماً ریاضی‌دانان قدیم ایران نیز برای حل هرمعادله بکار میبردند مثلا :

در مورد بند ۳ یعنی « میتوانیم جملات طرفین معادله را از طرفی بطرف دیگر ببریم بشرطی که علامت آنهارا تغییر دهیم » ، مهمترین‌عمل درجبرومقابلهٔ قدیم انجام همین امر بوده است ؛ زیرا در مواردیکه دریکطرف یا هر دو طرف معادله علامت منها برجمله ای مقدم بوده ، جملهٔ مزبور را بطرف دیگر برده و علامت (+) برآن مقدم میداشتند ؛ مثلاً در معادلهٔ :

$$۲x - ۳ = ۱۷$$

عدد ۳ را که باید از ۲x کم شود حذف کرده وبرای اینکه وضع تعادل در معادله برهم‌نخوردآنرا بطرف دیگرمی‌افزودند ، وبا این ترتیب‌جمله‌ای‌را باتغییر علامت بطرف دیگر نقل میکردند ، ومعادلهٔ بالا باینصورت درمیآمد:

$$۲x = ۱۷ + ۳$$

یا $$۲x = ۲۰$$

وچون با این عمل جملهٔ ۲x به تنهائی در یکطرف معادله باقی مانده و نقص‌آن که کم شدن عدد ۳ ازآن بود برطرف شده و بنا براین بصورت کامل ۲x (بدون کم شدن چیزی ازآن) درمیآمد این عمل را جبر میگفتند ، زیرا کلمهٔ جبر دراصطلاح ریاضی‌دانان قدیم بمعنای تمام و کامل بوده است .

در کتاب « مفتاح‌الحساب» راجع باین موضوع چنین مینویسد :

« وان کان فی احد المتعادلین اوفی کلیهما استثناءِ نطرح المستثنی برأسه حتی یبقی‌المستثنی منه‌وحده ای‌یصیر تامّاً ثم‌نزید مثل‌المستثنی‌المطروح‌علی‌الاخر و نعادل بین‌الباقی والمجموع فهو معنی الجبر مثلاً مال الّا شیئین یعادل خمسة عشر وبعدالجبر یصیر مال معادلاً لخمسة عشر وشیئین ».

ترجمه ــ و اگر در یکطرف یا هر دو طرف معادله مقداری کم کردنی موجود باشد آنرا حذف میکنیم تا مفروق تنها بماند یعنی تبدیل بمقدار کاملی (بدون اینکه چیزی ازآن کم شود ــ مترجم) گردد سپس بطرف دیگر معادله

همان مقداری را که ازطرف اول حذف کرده‌ایم اضافه مینمائیم ومعادله‌را مجدداً بین دوطرف در حالت فعلی برقرار میکنیم واین عمل را جبر گویند مثلاً :
مجذوری منهای دوشئ معادل است با پانزده ، که بعد از جبر چنین میشود :
مجذوری معادل است با پانزده و دوشئ .

واین عبارات باعلائم کنونی چنین نوشته میشود :

$$x^{۲} - ۲x = ۱۵$$

ویس ازعمل جبر : $x^{۲} = ۱۵ + ۲x$

ودرمورد بند۲ یعنی : «میتوان دوجملهٔ مساوی را از دوطرف معادله‌حذف کـرد» عین این عمل را قدما نیز انجام داده و آنـرا مقابله مینامیدند و عبارت مفتاح‌الحساب دراین باره چنین است :

« واذاكان جنس واحد موجود فی کل من‌المتعادلین نسقط المشترك من کل منهما و نعادل بین‌الباقیین مثلا شئ وعشرة یعادل اربعین نسقط‌العشرة من کل‌واحد من‌المتعادلین یبقی شئ معادل لثلثین وهذا معنی‌المقابله» .

ترجمه ـ« واگر درهریك ازطرفین‌معادله جملهٔ مشابهی‌موجود باشد مقدار مشترك آنها را حذف کرده و بین باقی اجزاء معادله را برقرار می‌سازیم ، مثلا دوشئ باضافه ده معادل است باچهل . عدد ده را از هرطرف حذف میکنیم باقی میماند دوشئ معادل است با سی ومعنی مقابله همین‌است » .

مثال بالا با علامات امروزه چنین میشود :

$$x۲ + ۱۰ = ٤۰$$

ویس‌ازمقابله $۲x = ۳۰$

ودربعضی از کتب ریاضی‌قدیم ، مقابله را با«حذف مقادیرمتشابهه» مرادف گرفته‌اند .

تبصره ـ چنانکه قبلا گفتیم بند ۲ خاصیتی است ازبند ۱ .

ودرمورد بند ٤ یعنی :

« میتوان دوطرف معادله را در دوعدد مساوی ضرب یابرآن تقسیم کرد» .

ریاضی دانان قدیم ایران نیز ازاین خاصیت برای حل معادلات استفاده میکردند؛ مثلا درمعادلات درجهٔ اول اگر ضریب x بزرگتر ازواحد بود تمام جمل را برآن ضریب تقسیم میکردند که بجای چند x یك x موجود باشد؛ و در معادلات درجهٔ دوم اگر ضریب x^2 بزرگتر ازواحد بود همین عمل راعیناً برای ضریب مزبور انجام میدادند واینرا «عمل رد» مینامیدند.

وهرگاه ضریب x درمعادلات درجهٔ اول وضریب x^2 درمعادلات درجهٔ دوم کوچکتر ازواحد بود تمام جمل معادله را بر کسر مزبورتقسیم مینمودندتاضریب x یا x^2 بمقدار واحد تبدیل شود واینرا «عمل تکمیل» میگفتند.

برای تایید مطلب عین عبارت کتاب مفتاح الحساب را راجع باین موضوع با ترجمهٔ آن ذیلا نقل میکنیم:

« واذاکان المال فی احدالمتعادلین اکثر من واحد نرده الی الواحد وان کان اقل نکمله وناخذ سایرالاجناس التی معه فیهما علی تلك النسبة بان نقسم عدد کل جنس علی عددالاموال لیخرج من المال مال واحد ولسایره علی تلك النسبة مثلا خمسة اموال و عشرة اشیاءِ یعادل ثلثین قسمنا کلا من الخمسة والعشرة والثلثین علی الخمسة خرج مال واحد واثنان اشیاءِ معادل لستة سمّی هذا بعمل الرد وان کان نصف مال و خمسة اشیاء یعادل سبعة قسمنا النصف والخمسة والسبعة علی النصف خرج مال واحد وعشرة اشیاءِ معادل لاربعة عشر وهذا یسمی بعمل التکمیل».

ترجمه ـ اگر دریکی ازدوطرف معادله **مقدارمال** (یعنی ضریب x^2 ـ مترجم) زیادترازواحد باشدآنرا بواحدتبدیل کرده واگر کمتر باشدآنراتکمیل مینمائیم وسایر جمل معادله را نیز بهمین نسبت تغییرمیدهیم؛ باینطریق که عدد هریك از **اجناس** را (یعنی هرجمله را ـ مترجم) بر**عدد اموال** (ضریب x^2) تقسیم میکنیم تا فقط **یك مال** بدست آید و نسبت بسایر جمل نیز همین عمل را انجام میدهیم. مثلا اگرپنج مال و ده شئ معادل با سی باشد اعداد ۵و۱۰و۳۰ را بر ۵ تقسیم میکنیم تا یك مال و۲ شئ معادل با ۶ حاصل گردد و این را عمل رد نامند؛ و اگر نصف مال وپنج شئ معادل با ۷ باشد نصف وپنج وهفت را بر نصف تقسیم

میکنیم تا یك مال و ۱۰ شئ معادل با ۱٤ بدست آید واینرا عمل تکمیل گویند».

توضیح ـ درمورد مثال اول باعلامات کنونی چنین باید بنویسیم ،

$$5x^2 + 10x = 30$$

که پس‌از عمل رد

$$x^2 + 2x = 6$$

ودرمورد مثال دوم

$$\frac{x^2}{2} + 5x = 7$$

که پس‌از عمل‌تکمیل

$$x^2 + 10x = 14$$

***

از مطالب بالا کاملا معلوم شد کـه برای حل مسائل جبری (تبدیل مسئله بمعادله و حل معادلات) ریاضی دانان قدیم ایران قواعدی بـکار میبردنـد کـه کوچکترین تفاوتی با آنچه امروزه ریاضی دانان بکار میبرند ندارد . برای‌تأیید بحل یك مسئلهٔ جبر از کتاب سال سوم دبیرستانها تألیف دبیران علوم ریاضی کـه امروزه درتمام دبیرستانها تدریس میشود پرداخته وآنرا باحل مسئله‌ای نظیرآن که در کتاب مفتاح‌الحساب مندرج است مقایسه میکنیم وخوانندگان‌عزیز بخوبی درخواهند یافت که مسائلی‌ازاین‌قبیل‌را قدما بهمان سرعت وسهولتی‌حل‌میکردند که امروزه حل میکنند .

مسئله (از کتاب جدید) ـ عددی بدست آورید که چون به۲ برابر آن سه واحد اضافه شود مساوی با۱۹ گردد .

حل ـ مسئله را حل‌شده انگاشته و جواب را x فرض میکنیم پس ۲ برابر آن میشود ۲x وبنا بفرض مسئله ، معادلهٔ زیر بدست میآید :

$$2x + 3 = 19$$

جواب این معادله جواب مسئله است :

$$2x = 19 - 3$$

$$2x + 16$$

$$x = \frac{16}{2} = 8$$

مسئله (از کتاب مفتاح الحساب) [۱] ــ کدام عدد است کـه اگر به دو برابر آن یـك واحد افزوده ومجموع را در۳ ضرب نموده و بـر حاصل ۲ واحد بیفزائیم سپس آنچه بدست میآید در ٤ ضرب کرده وبرحاصل ۳ واحد اضافه کنیم نتیجه ۹۵ شود .

حل ــ عددمطلوب را شئ [۲] فرض میکنیم ؛ دراینصورت اگر به۲برابرش یك واحد بیفزائیم خواهیم داشت دوشئ ویك واحد [۳] حال اگرآنرا در۳ ضرب کنیم حاصل مساوی شش شئ وسه واحد[٤] خواهد شد ؛ و اگـر برآن ۲ واحد اضافه نمائیم حاصل برابر شش شئ وپنج واحد[٥] خواهد بود . اکنون آنـرا در چهار ضرب میکنیم چنین نتیجه میشود : ۲٤ شئ و۲۰ واحد[٦] وبالاخره اگرسه واحد برآن بیفزائیم ۲٤ شئ و۲۳ واحد[۷] بدست خواهدآمد که بنابفرض مسئله معادل با ۹۵ میباشد [۸]. عدد مشترك راکـه ۲۳ باشد از دوطرف معادلـه حذف میکنیم باقی میماند ۲٤شئ معادل است با ۷۲[۹] سپس این عدد را بر ۲٤ که عدد اشیاء است (یعنی ضریب x ــ مترجم) تقسیم مینمائیم عدد ۳ بدست میآید [۱۰] که مقدار مجهول وجواب مسئله است .

اگر شرح این عملیات را بخواهیم باعلامات کنونی نشان دهیم مرتباً چنین خواهیم داشت .

$$\{[\,۳(۲x+۱)+۲\,]\times ٤\}+۳=۹۵$$

---

(۱) ترجمهٔ آن در اینجا آورده میشود و چنانکه میبینیم این مسئله پیچیده تر از مسئله قبلی است .

(۲) یعنی x

(۳) « $۲x+۱$

(٤) « $٦x+۳$

(٥) « $٦x+٥$

(٦) « $۲٤x+۲۰$

(۷) « $۲٤x+۲۳$

(۸) « $۲٤x+۲۳=۹۵$

(۹) « $۲٤x=۷۲$

(۱۰) « $x=\frac{۷۲}{۲٤}=۳$

$$[(٦x+٣+٢)\times ٤]+٣=٩٥$$
$$٢٤x+٢٠+٣=٩٥$$
$$٢٤x+٢٣+٩٥$$
$$٢٤x=٧٢$$
$$x=\frac{٧٢}{٢٤}=٣$$

درفرمولهای‌فوق‌چنانکه‌ملاحظه‌میشود‌علائم‌پرانتز ( ) و کروشه [ ] و آکولاد { } بکار رفته است . این علامات که از مخترعات دانشمندان اروپـاست البته دارای فوائدی میباشند ؛ ازجمله اینکه در هر رابطه‌ای وجود داشته باشند بـا یك نظر میتوان وضعیت محاسباتی که در رابطهٔ مزبور انجام خواهد گرفت تشخیص داد ؛ ودیگر اینکه تا اندازه ای باعث سرعت وسهولت عملیات جبری میباشند ؛ ولـی باید دانست که دربرابر این محسنات معایبی‌هم دارند : یکی اینکه دانش‌آموزان را ازتمرین درمحاسبات ذهنی وتمرکز قوای دماغی که یکی از موجبات پیشرفت درعلوم ریاضی‌است باز میدارند . دوم‌اینکه گاهی باعث اشتباه درمحاسبات‌میشوند چنانکه درجبرومقابله تألیف شادروان وحید مینویسد :

« برمتعلمین است که در استعمال آنها مواظبت تامه مجری دارنـد زیرا حذفشان بدون مراعات خاصیت مذکوره باعث خطاهای عمده میشوند».

قدما چنانکه درمسئلهٔ بالا دیدیم بدون بکار بردن ایـن علامات ، عملیات جبری‌را باکمال سرعت و ورزیدگی انجام میدادند و مرتکب هیچگونه خطا و اشتباهی‌هم نمیشدند .

حل معادلات دومجهولی ، سه مجهولی وچند مجهولی درجهٔ اول -
در کتابهای امروزه فصل مخصوص وجداگانه‌ای برای حل معادلات دو مجهولی و سه مجهولی وچند مجهولی درجهٔ اول در نظرگـرفته شده ولی قدما کار را آسانتر کرده ، ذهن دانش‌آموزان را با مجموعه‌ای ازمجهولات x و y و z و v وغیره مشوب ننموده و حافظهٔ آنها را با از بر کردن طرق حل و فرمولهای جداگـانـه خسته نمیکردند . چندین مسئله دو وسه وچند مجهولی‌را در کتابهای جدید حل کرده

که نظیر همانها در کتب قدیمه از راه یك مجهول فقط حل گـردیده‌اند و ذیـلا بذکر یك نمونه از این مسائل اقتباس از کتاب مفتاح الحساب میپردازیم و آن اینست :

مسئله ـ وزن جواهری که از طلا و مروارید ساخته شده سه مثقال و بهای آن ۲٤ دینار است . ضمناً میدانیم که طلا مثقالی ٥ دینار و مرواریـد مثقالی ١٥ دینار ارزش دارد . وزن هر کدام ازاین دورا درجواهر مزبور پیدا کنید .

حل ـ این مسئله با اصول امروزه چنین حل میشود :

وزن طلای محتوی در جواهر را x و وزن مروارید را y فرض میکنیم ؛ و چون مجموع آنها سه مثقال است پس خواهیم داشت .

$$x + y = ۳ \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر بهای طلای محتوی در جواهر مساوی $٥x$ و بهای مرواریـد برابر $١٥y$ میباشد وچون جمعاً ۲٤ دینار ارزش دارند پس :

$$٥x + ١٥y = ۲٤ \qquad (۲)$$

ازرابطهٔ (۱) مقدار y را پیدا کرده در رابطه (۲) میگذاریم چنین‌خواهیم داشت :

$$y = x + ۳$$

$$٥x + ١٥(x + ۳) = ۲٤$$

وپس‌از حل $x = ۲/۱$ مثقال

و

$$y = ۳ - ۲/۱ = ٠/۹$$

ولی در کتاب مفتاح الحساب مسئلهٔ مزبور را فقط با یك مجهول‌حل میکند از اینقرار :

اگر وزن طلا را شیئ (x) فرض کنیم قیمت آن پنج شیئ ($٥x$) خـواهد شد وبنابفرض مسئله وزن مروارید مساوی سه مثقال منهای‌شیئ ($x - ۳$) میباشد ؛ وبرای بدست‌آوردن قیمت مروارید باید وزنش‌را درقیمت هرمثقال از آن که ١٥ دینار است‌ضرب کرد وپس‌ازعمل‌چنین‌خواهیم‌داشت: چهل‌وپنج‌منهای پانزده شیئ

(یعنی $15(3-x)=45-15x$)

ومجموع بهای هردو خواهد شد : چهل و پنج منهای ده شیئ .

(یعنی $45-15x+5x=45-10x$)

واین‌قیمت‌معادل است با۲۴ دینار ؛ پس چهل وپنج منهای ۱۰شیئ‌مساویست با ۲۴

(یعنی $45-10x=24$)

بعداز عمل جبر ومقابله

مثقال $x=2.1$ وزن طلای محتوی در جواهر

و

مثقال $3-2.1=0.9$ وزن مروارید محتوی درجواهر



گفتار دوم

حل معادلات درجهٔ دوم

معادلات کامل درجهٔ دوم بصورت کلی :

$$ax^2+bx+c=0$$

نمایش داده شده و حل‌آنها مشکـلتر وپیچیده تر از معادلات درجهٔ اول بوده و مستلزم اعمال مختلف میباشد .

البته ایـن معادلات نیز بنوبت خود اهمیت فراوانی در جبر و مقابله دارد زیرا عدهٔ بینهایت زیادی از مسائل گوناگون را باید بوسیلهٔ معادلات درجهٔ دوم حل کرد ؛ بااینجهت یکی از بخش های مهم جبر ومقابله محسوب شده و قسمت اعظم برنامهٔ سال چهارم دبیرستانها را تشکیل میدهد .

اینك میخواهیم ببینیم معادلات کامـل درجهٔ دوم را امروزه چگونـه حل میکنند .

در کتاب جبر و مقابله تألیف دوازده دبیر ریاضی کـه قبلاً بـآن اشاره کردیم چندمثال در این باره ذکر شده است که یکی از آنها را بعنوان نمونـه انتخاب و دراینجا نقل میکنیم :

مثال ـ میخواهیم معادلهٔ $x^{۲} - ۶x - ۱ = ۰$ را حل کنیم :

حل ـ ابتدا معادله را معلوم ومجهول میکنیم [۱] :

$$x^{۲} - ۶x = ۱$$

اکنون بدوطرف معادله عدد ۷ را اضافه میکنیم . پس :

$$x^{۲} - ۶x + ۹ = ۱ + ۹$$

طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم :

$$(x - ۳)^{۲} = ۱۰$$

از دوطرف جذر میگیریم ؛

$$x - ۳ = \pm\sqrt{۱۰}$$

یا $x = ۳ \pm \sqrt{۱۰}$

می‌بینید که معادله دوجواب دارد؛ معمولاً یکی ازآنهارا به $x_{۱}$ ودیگری را بـه $x_{۲}$ نمایش میدهند؛ بنابراین جوابهای معادلهٔ فوق عبارتند از :

$$x_{۱} = ۳ - \sqrt{۱۰}$$
$$x_{۲} = ۳ + \sqrt{۱۰}$$



قریب صدسال است کـه علوم و معارف اروپـا بایران نفوذ پیدا کـرده و بصورت برنامه‌های کلاسیك درمدارس‌ما تدریس‌میشود ؛ دراینمدت طولانی‌متجاوز از هزار دبیر ریاضی ، معادلات درجهٔ دوم را بشرحی که در فوق بیان کـردیـم بشاگردان خود تعلیم داده‌اند ، ولی‌آیا درتمام مدت این یکقرن بعنوان نمونـه حتی یك دبیر پیدا شده است که حس کنجکاوی او تحریك ودرمقام‌تحقیق‌برآمده و مثلاً بعنوان نمونه برای ما بیان دارد که اعمالی که برای حل معادلات درجهٔ

---

(۱) یعنی تمام جمل مجهول‌را دریکطرف معادله قرار داده و جملهٔ معلوم را بطرف‌دیگر نقل میکنیم .

دوم در این کتابها دستور داده شده از کجا سرچشمه گرفته است ؟

تا آنجا که ما اطلاع داریم هنوزچنین کسی پیدا نشده و چنین عملی انجام نگرفته است ؛ و اگر کسانی‌هم درصدد تحقیق و بررسی دراین زمینه برآمده‌اند ، برای مطالعات خود هیچ راهی جز استفاده از کتب اروپائی نداشته ، و بنابراین فقط بنقل مطالب مندرج در آنها پرداخته‌اند ؛ ولی متأسفانه و با کمال صراحت باید اعلام کرد که در کتابهای مزبور بکلی سهم قدما بویژه دانشمندان قدیم ایران را درپیشرفت تمدن وسیر تکاملی علوم نادیده گرفته وهرچه هست برنگ اروپا درآورده و بدانشمندان مغرب زمین نسبت داده‌اند ؛ و اگر احیاناً گاهی برای نمونه ، از دانشمندان‌قدیم نامی برده شده است بیشتر برای تحقیرو کوچك کردن و نشان دادن اشتباهات وخطاهای علمی آنان بوده است تا بدین وسیله دانشمندان اروپا بزرگ جلوه کنند .

این حق کشی‌را محققان بزرگ و دانشمندانی که سراسر تاریخ علوم را با دیده‌ای عمیق ومنصف وبکلی دور از تعصّب مینگرند نتوانسته‌اند تحمل‌کنند؛ ازجمله جرج سارتن استاد بزرگ تاریخ علوم که دردنیا بحقیقت گوئی معروف است درکتاب «سرگذشت علم» میگوید :

« تمام تواریخ عمومی جهد بلیغ کرده‌اند که‌کارهای نژاد هندواروپائی را جلوه‌گر سازند . این‌کار بمنظور خاص انجام شده ودرآن هرچیز حول محورترقی وپیشرفت اروپا دورمیزند . البته این نظر بکلی غلط است واگر تجارب گرانبهای مشرق زمین درسطح تجربیات غربیان قرار نگیرد تاریخ نوع بشر ناقص خواهد بود » .

بهرحال اکنون که برای نخستین بار درایران این طلسم شکسته و این سد عظیم ازمیان برداشته شده ، برآقایان دبیران محترم فرض است که رنج مطالعه وتحقیق برخود هموار نموده و درهرقسمت از دانش‌ها بررسی کنند و تاریخچهٔ صحیحی از تحولات علوم را درضمن تدریس بشاگردان خود تعلیم داده و بنیان گذاران‌کاخ معظم علم را بدانش‌آموزان معرفی نمایند .

سخن کوتاه کنم ، بحث از حل معادلات درجهٔ دوم بود . آنچه فوقاً راجع بحل این معادلات شرح داده شد وامروزه درکلیهٔدبیرستانهای دنیا تدریس میشود. تماماً بدون اندك دخل و تصرفی از کتاب جبر ومقابله محمدبن موسی خوارزمی اقتباس شده که مدت هزار وصدسال است درتمام کشورهای جهان از کتابی بکتاب دیگر نقل گردیده و امروز بدون اینکه ما از متن اصلی آن کوچکترین اطلاعی داشته باشیم بوسیلهٔ ترجمه از کتب اروپائی بدست ما رسیده است . تنها کاریکه اروپائیان در چند قرن اخیر راجع بمعادلات مزبور انجام دادهاند تغییر اصطلاحات ودخالت حروف وعلامات درآنها است ، که آنهم بطوریکه خواهیم دید کوچکترین تأثیری درحل این معادلات ندارد .

اینك برای اثبات مطلب یك معادلهٔ کامل درجهٔ دوم را از متن اصلی کتاب جبر ومقابلهٔ خوارزمی دراینجا نقل میکنیم تا خوانندگان عزیز راه حلآنرا با راه حلی که امروزه درکتابها موجود است مقایسه نموده و برآنها معلوم گردد چگونه دانشمندان اروپا قدم بقدم همان راهیرا طی کردهاند که دانشمندانقدیم ما طی میکردهاند .

یكنسخهازکتاب جبر ومقابلهٔ خوارزمیرا فردریكروزن (Frederic Rosen) ریاضیدان و خاورشناس معروف از زبان عربی بانگلیسی ترجمه کرده و در سال ۱۸۳۱ مسیحی بطبع رسیده است . این کتاب شامل دوقسمت میباشد . یك قسمت متن اصلیآن بزبان عربی وقسمت دیگر ترجمهٔ آن بزبان انگلیسی با توضیحاتی که مترجم در زیر صفحات داده ، وضمائمیهم دارد که مربوط بهتفسیر وتوجیه مطالب متن کتاب است ،

در صفحهٔ ٥ این کتاب خوارزمی معادلهٔ درجهٔ دوم زیر :

مجذور عددی باضافه ده برابر همان عدد معادل است با۳۹ رامطرحنموده که امروزه چنین نمایش داده میشود :

$$x^۲ + ۱۰x = ۳۹$$

این معادله را خوارزمی حل کرده وما برای مقایسهٔ راه حل جدید و قدیم جدولی ترتیب میدهیم :

درسمت راست این جدول حل معادلهٔ $x^2 - ۶ - ۱ = ۰$ را که اقتباس از کتابهای امروز است ودرابتدای همین گفتار بشرح آن پرداختیم نوشته و درسمت چپ حل معادلهٔ $x^2 + ۱۰x = ۳۹$ را بطوری که خوارزمی شرح داده است ولی با اصطلاحات وعلامات کنونی مینویسیم و ردیف بردیف اعمال مختلفهٔ متوالیه را با یکدیگر مقایسه مینمائیم .



حل معادلهٔ $x^2 - 6x - 1 = 0$ که از کتب دبیرستانی امروزه اقتباس شده	حل معادلهٔ $x^2 + 10x = 39$ که از کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی اقتباس گردیده
ابتدا معلوم و مجهول میکنیم یعنی مجهولات را در یکطرف و جملهٔ معلوم را در طرف دیگر معادله قرار میدهیم معادله باینصورت درمیآید: $x^2 - 6x = 1$	معادلهٔ بالا را خوارزمی طوری طرح کرده که مجهولات در یکطرف و جملهٔ معلوم در طرف دیگر قرار گرفته بنابراین احتیاجی بمعلوم و مجهول کردن ندارد و مینویسیم: $x^2 + 10x = 39$
بدوطرف معادله عدد ۹ را اضافه میکنیم (توضیح آنکه عدد ۹ مساوی مجذور نصف ضریب x است) چنین خواهیم داشت: $x^2 - 6x + 9 = 1 + 9$	خوارزمی میگوید مجذور نصف ضریب x را که ۲۵ است بدوطرف میافزائیم چنین خواهیم داشت: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$
طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم: $(x - 3)^2 = 10$	خوارزمی میگوید با این عمل طرف اول معادله بصورت مربع کاملی درآمده است که طول هرضلع آن $x + 5$ میباشد و میتوان چنین نوشت $(x + 5)^2 = 64$
از دوطرف جذر میگیریم چنین خواهیم داشت: $x - 3 = \pm\sqrt{10}$	خوارزمی نیز میگوید از طرفین جذر میگیریم و چنین بدست میآوریم: $x + 5 = \pm\sqrt{64} = \pm 8$
عدد ۳ـ را بطرف دیگر نقل میکنیم: $x = 3 \pm \sqrt{10}$ جوابهای معادله عبارتند از $x_1 = 3 + \sqrt{10}$ و $x_2 = 3 - \sqrt{10}$	عدد ۵ را که نصف ضریب x است از طرفین کم میکنیم چنین خواهیم داشت: $x = \pm 8 - 5$ ولی خوارزمی فقط جواب مثبت $x_1 = +8 - 5 = 3$ را قبول داشته و جواب منفی را نمیپذیرد (علت آنرا توضیح خواهیم داد)

ازملاحظهٔ جدول صفحهٔ قبل معلوم شد که امروزه برای حل‌معادلات درجهٔ دوم عیناً همان اعمالی‌را انجام میدهند که قدما دستور داده بودند.

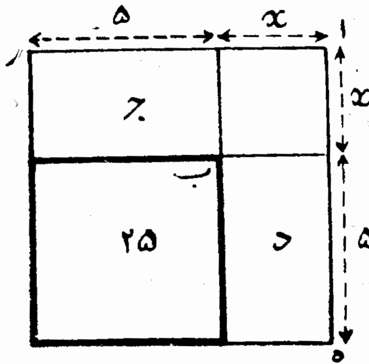
اکنون برای توضیح وتکمیل این مبحث لازم میدانیم بسه سؤال زیرپاسخ دهیم :

سئوال اول - راه حل معادلات درجهٔ دوم چگونــه پیدا شد و بچه دلیل برای بدست‌آوردن مجهول اعمال خاصی‌را که شرح آن گذشت مرتباً یکی پس‌از دیگری باید انجام داد ؛ مثلاً این فکر از کجا پیدا شد که باید مجذور نصف ضریب x را بطرفین معادله اضافه کرد ، تا طرفی کــه شامل مجهول است بصورت مجذورکامل درآمده وسپس ازآن جذر بگیریم ؟ برای پاسخ باین سئوال‌در کتب امروزه چیزی نمیتوان یافت ؛ ناچار بکتب قدیمه مراجعه میکنیم . در کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی و سایر ریــاضی دانان قدیم می بینیم کــه آنها برای حل معادلات درجهٔ اول و دوم وسوم راهی ساده ودرعین‌حال کاملامنطقی ومستدل پیدا کرده بودند و آن برهان هندسی است .

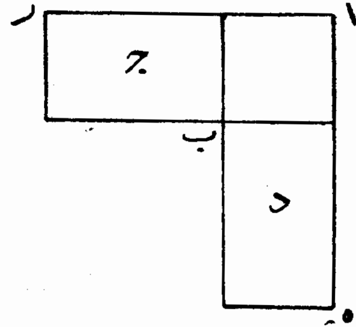
مگر نه اینست که اگرعددی را بوسیلهٔ ضلع مربعی نمایش دهیم،مساحت این مربع مجذورآن عدد خواهد بود ؛ بنابراین درمعادله‌ای که خوارزمی مطرح کرده ومیگوید: مجذور عددی باضافه ده برابر همان عدد معادل است با ۳۹ :

$$x^{۲} + ۱۰x = ۳۹$$

میتوانیم مربع ا ب را طرح کنیم که مساحتش مساوی $x^{۲}$ و طول هر ضلعش برابر x باشد ش۱ آنگــاه باید $۱۰x$ را باین مربع اضافه کنیم تا مجموع مساوی ۳۹ شود . برای انجام این امر ضریب x را که دراینجا ۱۰ است نصف میکنیم ، میشود ۵ و دو مستطیل در دوطرف مربعی که طرح کرده‌ایم میسازیم بطوریکــه طول‌اضلاع هریك ازآنها مساوی x و ۵ باشد ؛ باین ترتیب دومستطیل (د) و (ج) بوجود میآید ، و طبق معادله ای که طرح کرده ایم میدانیم که مجموع مساحات دومستطیل ومربع معادل ۳۹ میباشد .



ش ۲



ش ۱

ساختمان دماغی بشر از دورانهای اولیه زندگی چنین بوده است که هر جهش فکری وهرقدمی که بسوی حل مشکلات طبیعت برمیدارد خودبخودراهی جدید وفکری تازه ایجاد کرده و از رموز واسراری کـه قبلا براو مجهول بوده است آگاه میشود . بعضی از افراد بشر که دانشمندان بزرگـ و نوابغ جزءِ این دسته محسوب میشوند بیش‌از سایرین ازاین موهبت برخوردارند زیرا بـا داشتن نیروی اشراق و روشن بینی و نوعی‌تصور خلاقه با سهولت وسرعت بحل مجهولات فائق میشوند ؛ بنابراین بعید نیست کـه برای اولین بار یـك دانشمند ریاضی از مشاهده شکل۱ بفکر افتاده باشد با پر کردن جای خالی مربع کاملی به شکل۲ بسازد . پس‌از انجام این امرمشاهده کرده است که مساحت مربعی که جای خالی را پر کرده مساوی ۲۵ است ، زیرا طول هرضلع آن برابر ۵ میباشد ؛ پس اگر این ۲۵ را (کـه درحقیقت مجذور نصف ضریب x است) بـه $x^۲+۱۰x$ اضافـه کنیم مساحت مربع بزرگ چنین خواهد شد :

$$x^۲ + ۱۰x + ۲۵$$

درعین حال مساحت همین مربع بزرگ مساویست با :

$$۳۹ + ۲۵ = ۶۴$$

بنابراین طول ضلع این مربع بزرگ از یکطرف مساوی با $x + ٥$ و از طرف دیگر مساویست با $\sqrt{٦٤}$ یعنی ۸ پس خواهیم داشت :

$$x + ٥ = \sqrt{٦٤}$$

یا

$$x = \sqrt{٦٤} - ٥$$

از راه هندسی بطوریکه درشکل پیداست برای x فقط :

$$x = \sqrt{٦٤} - ٥ = ٨ + ٥ = ٣$$

بدست میآید ....

هوگبن (Hogben) ریاضی دان وزیست‌شناس انگلیسی کتابی تحت‌عنوان :

«Mathematic for citizen»

نوشته که بزبان فرانسه بنام «Mathématiques pour tous» ترجمه شده . هوگبن دراین کتاب ، خوارزمی و خیام را از بزرگترین ریاضی دانان عرب ! ! دانسته و دستور حل معادلات درجهٔ دوم را باسم قانون خوارزمی‌نامیده و استدلال هندسی‌را بطوریکه شرح آن گذشت بیان میدارد وهمینکه بجواب معادله‌میرسد مینویسد :

ریاضی دانان عرب از قانون علامات (Loi des signes) مطلع بوده و مثلا میدانستند که :

$$(-a) \times (-a) = a^٢$$

و

$$(+a) \times (+a) = a^٢$$

پس :

$$\sqrt{a^٢} = \pm a$$

باینجهت در معادلهٔ $x^٢ + ١٠x = ٣٩$ همینکه بجواب $x = +\sqrt{٦٤} - ٥ = ٣$ میرسیدند میدانستند که معادله جواب دیگری نیز دارد و آن مساوی $x = -\sqrt{٦٤} - ٥ = -١٣$ است ومخصوصاً مینویسد که :

« اعراب طبق روابط زیر محقق داشتند که هردو جواب درمعادله صدق میکند :

$$۳^۲ + (۱۰ \times ۳) = ۹ + ۳۰ = ۳۹$$

$$(-۱۳)^۲ + ۱۰(-۱۳) = ۱۶۹ - ۱۳۰ = ۳۹$$

ولی هیچگونه معنی برای جواب منفی نمیتوانستند قائل شوند» (علت آنرا ما بعداً توضیح خواهیم داد).

ضمناً مینویسد که :

« هنوزهم میتوانیم قاعده بدست آوردن x را در معادله‌ای که شامل $x^۲$ است بنام قاعدهٔ « تکمیل مربع» بنامیم زیرا از قدیم الایام حل مسائل و معادلات را بوسیلهٔ رسم اینگونه مربع‌ها معمول میداشتند و با اینکه امروزه در کتابهای جبر ومقابله از ترسیم مزبور برای اثبات حل معادلات درجهٔ دوم صرف نظرمیکنند ، معهذاهنوزهم این‌معادلات‌بنام«معادلات تربیعی» «Equations quadratiques» نامیده میشود که از کلمهٔ لاتین«Quadratum» بمعنای چهار گوشه مشتق است».

سئوال دوم - ریاضی دانان قدیم ایران راجع به اعداد منفی چه نظر و عقیده‌ای داشته‌اند ؟ .

وپکه (Woepcke) کتابی در جبر و مقابلهٔ خیام نوشته و در آن کتاب بدون‌اینکه معتقدات ریاضی‌قدما راکاملا توجیه و تفسیر نماید انتقادات غیرواردی بر آنها کرده مثلا در چندجا مینویسد :

« خیام وخوارزمی ودیگر ریاضیون اسلامی ازاعداد منفی وموهومی غافل بوده وباینجهت اگر درمعادلات‌جواب‌مثبت بدست‌نمیآمدآنرا ممتنع‌میشمرده‌اند» .

وحال آنکه حقیقت امرچنین نیست وخیام وخوارزمی و سایر ریاضی‌دانان قدیم ایران بهیچوجه از اعداد منفی وموهومی غافل نبوده و اگر جوابهای منفی را درمسائل ومعادلات قبول نداشته‌اند دلیلی داشته است که باید توضیح‌داده‌شود.

میدانیم که یکی از اختلافات اساسی علم جبر و مقابله باعلم حساب وجود اعداد جبری یعنی اعدادیست که علامت + یا — برآنها مقدم بوده وبنام مثبت ومنفی نامیده میشوند . کلیهٔ عملیات ومحاسبات درعلم حساب با اعداد حسابی (اعدادی‌که برآنها علامت + یا — مقدم نشده باشد) و درعلم جبر ومقابله با

اعدادجبری (اعدادی که بر آنها علامت + یا — مقدم‌شده باشد) انجام‌میگیرد؛ مثلا درعلم حساب اگر بخواهیم عدد ۲۲ را در عدد ۵ ضرب کنیم‌چنین‌مینویسیم:

$$۲۲ \times ۵ = ۱۱۰$$

ولی درجبر ومقابله چون کمیات اعم از اینکه بوسیلهٔ اعداد یاحروف نشان داده شده باشند دارای علامت مثبت یامنفی‌هستند لذا علامت حاصلضرب دومقدار بسته بعلاماتی است که بر آن دو مقدار مقدم میباشد مثلا حاصلضرب $+x^{۲}$ در $-۲x$ مساویست با $-۲x^{۳}$ وآنرا چنین مینویسند :

$$(+x^{۲}) \times (-۲x) = -۲x^{۳}$$

این موضوع یعنی مثبت و منفی بودن کمیات درجبر ومقابله بر قدما کاملا کاملا معلوم بوده است ؛ زیرا می‌بینیم تمام عملیات ومحاسبات را درمقادیرجبری با رعایت مثبت و منفی بودن آنها انجام داده وهمان اعمال را درعلم حساب‌بدون رعایت علامات مزبور اجرا میکرده‌اند ؛ منتها بجای کلمات « مثبت » و «منفی» اصطلاحات «زائد» و «ناقص» را بکار میبردند ، ودرحقیقت اسم بامسمائی را هم برای این امر انتخاب کرده بودند ، زیرا معنی واقعی یك عدد مثبت اینست که باعدد دیگری جمع شده مقدار آنرا زیـاد کند ومعنی حقیقی عدد منفی اینست که ازعدد دیگری کم شده وباعث نقصان مقدار آن گردد .

برای تأیید مطلب قاعدهٔ ضرب اعداد و مقادیـر جبری را مثال میزنیم . در کتب جدید جبر ومقابله قاعدهٔ مزبور چنین خلاصه میشود :

حاصلضرب مقدار مثبت درمقدار مثبت میشود مثبت
« « منفی « « منفی « مثبت
« « منفی « « مثبت « منفی
« « مثبت « « منفی « منفی

ودر کتاب «مفتاح‌الحساب» تألیف غیاث‌الدین جمشید نیز این قاعده عیناً دستور داده شده است باین عبارت :

« لان حاصلضرب‌الزاید فی‌الزاید زاید وحاصلضرب‌الناقص فی‌الناقص ایضاً زاید وحاصلضرب‌الزاید فی‌الناقص وبالعکس ناقص»

یعنی «حاصلضرب مقدار مثبت درمثبت مقداریست مثبت وحاصلضرب‌منفی درمنفی نیز مثبت است و حاصلضرب مثبت درمنفی وبالعکس (یعنی منفی درمثبت) منفی‌میباشد».

درمورد سایر اعمال ومحاسبات جبری نیز قدما اعداد منفی را میشناختند و همانطورکه امروزه معمول است قانون علامات (Loi des signes) را برحسب شرایط مختلف رعایت مینمودند . بعنوان مثال گوئیم درتفریق‌جبری امروزقاعده اینست که اگربخواهیم $-۲x$ را از $۵x$ کم‌کنیم بایدچنین بنویسیم :

$$۵x-(-۲x)$$

چون علامت — بر پرانتز مقدم است ، علامت داخل پرانتز را تغییر داده تبدیل بـه + میکنیم یعنی $(-۲x)$ — تبدیل بـه $+۲x$ میشود و نتیجه چنین خواهد بود :

$$۵x-(-۲x)=۵x+۲x=۷x$$

وهرگاه مفروق ومفروق منه هرکدام ، ازچند جمله مثبت ومنفی تشکیل شده باشد همین قاعده در بارهٔ آنها رعایت میشود . مثلا میخواهیم $x^۲-۲x-۲$ را از $۳x^۲-۶x+۴$ کم‌کنیم چنین مینویسیم :

مفروق منه   مفروق

$$(۳x^۲-۶۵+۴)-(x^۲-۲x-۲)$$

برای انجام عمل تفریق فوق باید علامات‌جمل داخل پرانتز دست‌راست‌را که مفروق است تغییر داده و جمل مفروق را پس‌از تغییر علامت در دنبال جمل مفروق منه بنویسیم ، یعنی در حقیقت بجای $(+x^۲)$ — بنویسیم $-x^۲$

وبجای $(-۲x)$ — بنویسیم $+۲x$

وبجای (-۲) — بنویسیم $+۲$

ونتیجه چنین میشود :

$$(۳x^۲ - ٦x + ٤) - (x^۲ - ۲x - ۲) =$$
$$۳x^۲ - ٦x + ٤ - x^۲ + ۲x + ۲$$

وپس از ساده کردن چنین خواهیم داشت :

$$= ۲x^۲ - ٤x + ٦$$

چنانکه می‌بینیم در این عملیات ، هریك ازاعداد جبری علاوه برمقدار و کمیتی که دارد ، دارای علامت + یا — نیز میباشد که مشخص آنست و باعث میشود کـه ما دو نوع عدد جبری متمایز از یکدیگر قائل شویم یکی مثبت و دیگری منفی . عین این قضیه را قدما نیز ضمن عمل تفریق جبری در نظر داشته ویك عدد منفی را مثلا اگر میخواستند از یکعدد مثبت کم کنند علامت آن عدد منفی را تغییر داده + میکردند وبجای انجام عمل تفریق ، عدد مزبور را باعدد دیگر جمع مینمودند ؛ و در کتاب مفتاح الحساب مطلب مزبور باین عبارت نوشته شده است :

« وان‌کان فی‌المنقوص والمنقوص منه معاً استثناءِ **فنجمع** الاجناس **الناقصة** للمنقوص مع الاجناس الزایدة للمنقوص منه لینجبر المنقوص و یزید فی‌المنقوص منه بقدر جبر المنقوص ثم ننقص الاجناس **الزایدة** للمنقوص من الاجناس الزایدة الحاصلة والناقصة للمنقوص منه بمثل مامر. »

یعنی : اگر ، هم درمفروق و هم درمفروق منه مقادیر منفی موجود باشد، باید مقادیر منفی مفروق را بـا مقادیر مثبت مفروق منه جمع کـرد(۱) ؛ باین ترتیب که مقادیر مزبو را از مفروق حذف کرده و بمفروق منه اضافه میکنیم ؛ سپس همانطور که قبلا گفتیم جمل مثبت مفروق را از جمل مثبتهٔ حاصله ومنفیهٔ مفروق منه کم مینمائیم» .

همین اندازه کافی است ثابت کند که قدما اعداد مثبت ومنفی‌را میشناختند و عملا در محاسبات جبری از خواص آنها استفاده مینمودند ؛ اما اینکـه چرا در

(۱) یعنی علامت(—) را تبدیل به (+) نمود .

معادلات فقط بجواب یا ریشهٔ مثبت قانع شده و جواب منفی را قبول نمیکردند ، علت این بود که معادلات را همیشه برای حل مسائل تشکیل میدادند ، ومسائلی که در شرایط معمولی زندگی مطرح میشد جواب منفی‌را قبول نمیکرد ، وامروز نیز اگر ما آنقدرها با اعداد منفی خو نگرفته بودیم ، جوابهای منفی‌را نمیتوانستیم پذیرفت ؛ مثلا درمسئلهٔ زیر :

مسئله ــ مطلوبست عدهٔ درختان میوهٔ یك باغچه در حالیکه میدانیم اگر عدهٔ درختان مزبور را مجذور نموده وچهار برابر عدهٔ درختان را باین مجذور بیفزائیم حاصل مساوی ۶۰ خواهد شد .

برای حل مسئله ، آنرا بمعادله میگذاریم ، چنین خواهیم داشت :

$$x^{2} + 4x - 60 = 0$$

وپس از حل :

$$x_{1} = 6$$

$$x_{2} = -10$$

فقط میتوانیم جواب مثبت را پذیرفته وبگوئیم ۶ درخت میوه دراین‌باغچه موجود است . البته جواب دوم یعنی ۱۰ــ نیز یك جواب معادله است یعنی اگر عدهٔ درختان را ۱۰ــ فرض کنیم مجذور آن باضافه ٤ برابرش مساوی ۶۰ خواهد شد ، ولی آیا میتوان گفت که درباغچهٔ مزبور ۱۰ــ درخت موجود است ؟ وآیاچنین جمله‌ای دارای معنی خواهد بود ؟

اگر صدها و هزارها مسئله که مفروضاتشان با عوامل زندگی روزانهٔ ما سر وکار دارد طرح کنیم ، برای عموم آنها جواب منفی غیر قابل قبول خواهد بود .

در کتاب جبر و مقابله تألیف شادروان وحید نیز ، غیر قابل قبول بودن جوابهای منفی تذکر داده شده ، ازجمله مسئله‌ای طرح کرده ومینویسد :

« شخصی در جیبش ده قطعه پول پنجقرانی و دو قرانی دارد میگوید که تمام پول من ۶۰ قران میباشد پس چندعدد پنجقرانی و دوقرانی دارد .

چون عدهٔ دوقرانی‌ها را x فرض کنیم عدهٔ پنجقرانی ها $(10-x)$ خواهد بود وبرحسب فرض مسئله معادلهٔ زیر حاصل میشود :

$$2x+5(10-x)=60$$

یا

$$2x+50-5x=60$$

واز آنجا

$$x=-\frac{10}{3}$$

مقدار $-\frac{10}{3}$ که ریشهٔ معادلهٔ مسئلهٔ مفروضه میباشد ابداً درفرض مسئله صدق نمیکند زیرا که کلیهٔ این قبیل مسائل تقاضای جواب مثبت و صحیح مینمایند پس مسئلهٔ مفروضه دارای جواب نبوده وغیر ممکن است».

با اینحال مواردی پیش میآید که میتوان برای جوابهای منفی تعبیری قائل شده و با اندك تصرفی در مفروضات مسئله آنها را قابل قبول دانست ، و آن مواقعی است که با کمیاتی سر وکار داشته باشیم که در دوجهت مختلف قابل تغییر باشد مثل طول ، حرارت ، سرمایه وزمان ؛ وبرحسب قرارداد و معاهده یکی از دوجهت تغییرات را مثبت وجهت دیگررا منفی فرض کنیم .

برای روشن شدن مطلب بجلد اول کتاب جبر و مقابله تألیف وحید صفحهٔ ۱۶۱ مراجعه میکنیم ، مینویسد :

« تعبیر جوابهای منفیه ـ ممکن است اتفاق افتد که ریشهٔ معادلهٔ مسئله منفی باشد ، در اینصورت نباید فوراً وجود ریشهٔ منفی معادلهٔ مسئله را دلیل بر امتناع مسئله دانست و بلکه لازم است سعی و دقت کرده تعبیری بجهت ریشهٔ منفی پیدا نمود یعنی بعبارة اخری ملاحظه نمود که آیا حقیقتاً مسئله غیرممکن و ممتنع است ویا بوسیلهٔ اندك تصرف و تعبیری در فرض مسئله و ریشهٔ معادله میتوان همان ریشهٔ منفی را جوابی دانست .

مثال ـ سن پدری ۵۰ سال و سن پسرش ۲۶ سال میباشد تعیین کنید بعد از چند سال دیگر سن پدر مضاعف سن پسر میشود . چون مدت مطلوب را بحسب سال x فرض کنیم برحسب فرض مسئله معادلهٔ ذیل حاصل میشود :

$$۵۰ + x = ۲(۲۶ + x)$$

ویا $۵۰ + x = ۵۲ + ۲x$

ویا $x = -۲$

و حال بواسطهٔ وجود جواب منفی ۲ـ نباید گفت که مسئلهٔ مفروضه غیر ممکن میباشد و بلکه بواسطهٔ اندك تصرفی در فرض مسئله میتوان همین جواب منفی را قابل قبول دانست ؛ بدین طریق که درفرض مسئله بجای عبارت « بعداز چند سال دیگر» و «میشود» عبارات « که درچندسال قبل» و «بوده است» را قرار داد وچنین گفت :

سن پدری ۵۰ سال وسن پسرش ۲۶ سال میباشد تعیین کنید که در چند سال قبل سن پدر مضاعف سن پسر بوده است؟»

بطوریکه ملاحظه میفرمائید دراین مثال نیز جواب منفی فقط بشرطیقابل قبول است کـه مفروضات مسئله تغییر کند ؛ ولی در اینصورت جوابی کـه بدست خواهدآمد منفی نبوده و مثبت خواهد بود ، زیـرا پس از تغییر مفروضات مسئله بترتیبی که دربالا گذشت :

$$۵۰ - x = ۲(۲۶ - x)$$

وازآنجا $x = ۲$

پس درحقیقت میبینیم که دراینجا نیز جواب مثبت قابل قبول است .

بهرحال با توضیحاتی که دادیم معلوم شد ریاضی دانان قدیم ایران کـه جوابهای منفی را درمسائل و معادلات قبول نمیکردند عذرشان موجه بوده ودلیل منطقی داشتهاند وبنابراین نباید گفت که آنها ازاعداد منفی غافل بودهوباینجهت فقط جوابهای مثبت را میپذیرفتهاند .

سؤال سوم - آیا ریاضی دانان قدیم ایران برای حل معادلات کامل درجهٔ دوم دستور عمومی یا فرمولی داشته‌اند که هرمعادله درجهٔ دومی را بکمك آن بتوان حل کرد یا خیر ؟- یکی از پیشرفت های بزرگ در علم جبر ومقابله بکار بردن حروف بجای اعداد برای عمومیت دادن حل معادلات ومسائل جبری است. دکارت ریاضی‌دان وفیلسوف فرانسوی (۱۵۹۶-۱۶۴۹) برای انجام این‌امر حروف اول الفبارا بجای مقادیر عددی وحروف آخرالفبارا بجای مجهولات انتخاب کرد؛ وازاینراه چون اعمال مختلفه عوض اینکه در اعداد معینه بجا آورده شود در حروف بعمل‌خواهدآمد ، بنابراین بواسطهٔ حل یك معادله میتوان‌جمیع معادلاتی راکه ازهمان جنس باشند حل نمود . برای روشن شدن مطلب، یکی ازمعادلات کامل درجهٔ دوم مثلا $x^{۲}-۶x-۱=۰$ را حل میکنیم .

چنانکه قبلا گفتیم ، برای حل این معادله ابتدا معلوم و مجهول میکنیم :

$$x^{۲}-۶x=۱$$

اکنون بدوطرف معادله عدد ۹ را اضافه میکنیم :

$$x^{۲}-۶x+۹=۱+۹$$

طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم :

$$(x-۳)^{۲}=۱۰$$

از دوطرف جذر میگیریم :

$$x-۳=\pm\sqrt{۱۰}$$

یا
$$x=۳\pm\sqrt{۱۰}$$

وهمانطورکه قبلا یادآور شدیم معادله مزبور دو جواب یا دوریشه دارد .

میدانیم که در معادلات‌کامل درجهٔ دوم میتوان بجای ضریب $x^{۲}$ و x و جملهٔ معلوم جمیع مقادیرممکنه را قرارداد ، بنابراین‌عدهٔ بینهایت زیاد ازاین‌معادلات میتوانیم تشکیل دهیم . آیا برای حل معادلات مزبور باید هردفعه تمام اعمالی‌را که شرح دادیم تکرار نمائیم ؟ کسانی که اولین مرتبه بفکر این موضوع افتادند

درصدد برآمدند راهی پیدا کنند که بتوان تمام این قبیل معادلات و بطور کلی همهٔ معادلاتی را که از یك جنس میباشند بوسیلهٔ یك دستور عمومی حل کنند ؛ و بطوریکه در کتابهای جبر و مقابله مینویسند ، قرار دادن حروف بجای اعداد برای انجام همین منظور بوده است .

پس معادلات کامل درجهٔ دوم را میتوان بصورت کلی

$ax^2+bx+c=0$ درآورد

برای حل این معادله ابتدا معلوم ومجهول میکنیم :

$ax^2+bx=-c$

دوطرف را برضریب x^2 یعنی a تقسیم میکنیم :

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$\frac{b}{a}$ را نصف میکنیم میشود $\frac{b}{2a}$ ومجذور آنرا که $\frac{b^2}{4a^2}$ استبدوطرف اضافه میکنیم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

طرف اول را بصورت توان ۲ مینویسیم :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

از دوطرف جذر میگیریم :

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\frac{b}{2a}$ را بطرف دوم میآوریم :

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

یا

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

بطوریکه در فرمول کلی بالا ملاحظه میشود معادلهٔ کامل درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دوجواب :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و

میباشد . این جوابها دستور کلی است برای بدست آوردن جواب هرمعادلهٔ درجهٔ دوم ، باین معنی که وقتی در این فرمول بجای a ضریب جملهٔ درجه دوم و بجای b ضریب جملهٔ درجهٔ اول وبجای c مقدار معلوم آن معادله‌را قرار دهیم جوابهای آن معادله بدست میآید . فرمول فوق را دستور حل معادلهٔ درجهٔ دوم گویند ؛ مثلا اگر بخواهیم معادلهٔ $2x^2 - 3x - 2 = 0$ را حل کنیم مقدارعددی a و b و c را که باید در دستور بجایشان قرار دهیم تعیین میکنیم :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

پس : $a = 2$

$$b = -3$$

$$c = -2$$

بنابراین جوابهای معادله میشوند :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(+2)(-2)}}{2(+2)}$$

یا $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$

یا $x = \frac{3 \pm 5}{4}$

$$x_1 = \frac{٣ + ٥}{٤} = ٢ \text{ وازآنجا}$$

$$\text{و} \quad x_2 = \frac{٣ - ٥}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

معادلهٔ فوق دو ریشه دارد که عبارتند از :

$$x_1 = ٢$$

$$\text{و} \quad x_2 = -\frac{١}{٢}$$

تبصره ـ اگر a یعنی ضریب $x^٢$ مساوی واحد باشد معادلات کامل درجهٔ دوم را میتوان بصورت :

$$x^٢ + px + q = ٠$$

درآورد وفرمول کلی برای حل این قبیل معادلات عبارتست از :

$$x = -\frac{p}{٢} \pm \sqrt{\frac{p^٢}{٤} - q}$$

✲✲✲

شکی نیست که بدست آوردن فرمولهائی برای عمومیت دادن حل‌معادلات جبری را باید بمنزلهٔ یك پیشرفت بزرگ درعلم جبر و مقابله تلقی کرد ، زیرا بکمك این فرمولها میتوان عدهٔ زیادی معادلات مشابه را باسرعت و سهولت حل کرده و بدین طریق ازاتلاف وقت جلوگیری نمود ؛ واگر کتابهای جبرومقابلهٔ جدید را مورد مطالعه قرار دهیم خواهیم دید پر از فرمولها و دستورات عمومی میباشد ، درحالیکه کتب جبر ومقابلهٔ قدیم ظاهراً فاقد علامات و حروف بوده و فرمولهائی برای حل معادلات نظیر آنچه که در کتابهای جدید دیده میشود در آنها بنظر نمیرسد ؛ ولی اگر در این کتابها دقیق شویم خواهیم دید که نه تنها ریاضی دانان قدیم ایران برای حل معادلات فرمولها و دستورات کلی داشته اند ، بلکه مهمترین فرمولها و دستوراتی که امروزه برای حل معادلات مختلف موجود است اقتباس ازهمان فرمولهای قدماست .

برای اثبات مطلب دو مسئله از کتاب «مفتاح الحساب» کـه نظایر آن در کتاب جبر ومقابلهٔ خوارزمی وسایر کتب ریاضی قدیم ایران زیاد وجود دارد و حل آن منجر به تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم میشود عیناً ترجمه کرده دراینجانقل میکنیم . و برای توضیح عبارات کتاب ، هرجا به اصطلاحات قدیمه بـرخوردیم معادل آنهارا باحروف وعلامات کنونی درداخل پرانتز قرار میدهیم .

مسئلهٔ ۱ـ اجرت کارگری درهرماه نود دینار است ، تعیین کنید چند روز مشغول کار بوده درحالیکه میدانیم اگر از اجرتی که دریافت کرده ۲ دینار کـم کنیم حاصل مساوی مجذور عدهٔ روزهائی خواهدشد که‌کار کـرده است ؛ بعبارت دیگر عددی پیدا کنید که اگر از سه برابر آن ۲ واحد کم کنیم حاصل مساوی مجذور همان عدد گردد ، زیرا نسبت اجرتی که عملهٔ مزبور دریافت نموده به‌عدهٔ روزهائی که مشغول‌کار بوده مثل نسبت سه بیك میباشد .

حل ـ عدهٔ روزهائی که‌کار کرده‌است شیئ(x) فرض‌میکنیم ، پس‌اجرتش مساوی سه شیئ ($۳x$) خواهد بود . ۲ دینار از آن کم میکنیم ، حاصل مساوی سه شیئ منهای ۲ دینار : ($۳x - ۲$) خواهد شد ، واین برابر مجذور شیئ ($x^۲$) میباشد (یعنی : $x^۲ = ۳x - ۲$) .

وبعداز عمل جبر[۱] خواهیم داشت : مجذور شیئ و۲ واحد معادل است‌با سه شیئ (یعنی $x^۲ + ۲ = ۳x$) .

تـا اینجا ترجمه از متن کـتاب بـود و اینك بمعادلهٔ کامل درجهٔ دوم $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ رسیدیم که باید آنرا حل کنیم .

امروز برای حل این معادله چنین مینویسیم :

$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$$

واز فرمول کلی $x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p۲}{٤} - q}$ استفاده‌نموده‌بجای p و q مقادیر عددی آنهارا قرار داده دو جواب معادله را پیدا میکنیم ؛ بااینطریق :

---

(۱) سابقاً گفتیم که اگر جملهٔ منفی را با تغییر علامت بطرف دیگر معادله بریم این‌عمل را جبر گویند) .

$$p = -۳$$

و $$q = ۲$$

پس $$-\frac{p}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

و $$\frac{p^{۲}}{۴} = \frac{۹}{۴} = ۲\frac{۱}{۴}$$

و $$\frac{p^{۲}}{۴} - q = \frac{۱}{۴}$$

و $$\pm\sqrt{\frac{p^{۲}}{۴} - q} = \pm\frac{۱}{۲}$$

پس $$x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^{۲}}{۴} - q} = \frac{۳}{۲} \pm \frac{۱}{۲}$$

بنابراین دوجواب معادله یا دوجواب مسئله عبارتند از :

$$x_{۱} = \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

و $$x_{۲} = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

این محاسبات را میتوانیم درجدولی بشکل زیر نمایش دهیم :

جدول با اصطلاحات جدید برای حل معادلهٔ $x^{۲} - ۳x + ۲ = ۰$

$-p$	$\frac{-p}{۲}$	$\frac{p^{۲}}{۴}$	q	$\frac{p^{۲}}{۴} - q$	$\sqrt{\frac{p^{۲}}{۴} - q}$	$x_{۱} = -\frac{p}{۲} + \sqrt{\frac{p^{۲}}{۴} - q}$	$x_{۲} = -\frac{p}{۲} - \sqrt{\frac{p^{۲}}{۴} - q}$
۳	$\frac{۳}{۲} = ۱\frac{۱}{۲}$	$\frac{۹}{۴} = ۲\frac{۱}{۴}$	۲	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۲	۱

ونظیر همین جدول است که قدما برای حل‌معادلات‌کامل درجهٔدوم ، بجای فرمول $x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^{۲}}{۴} - q}$ ازآن استفاده میکردند . منتها بجای p که ضریب x است کلمهٔ «عدد اشیاء» و بجای q که جملهٔ معلوم است کلمهٔ «عدد» را بکار

میبردند ؛ واینك جدولی که غیاث الدین جمشید در کتاب مفتاح الحساب برای حل معادلهٔ $x^2 + ۲ = ۳x$ تنظیم کرده‌است‌در اینجانقل‌میشود وخوانندگان محترم ملاحظه خواهند فرمود که دراین جدول محاسبات برای حل معادلهٔ مزبور باهمان سرعت وسهولتی صورت میگیرد که امروزه با فرمول $x = -p \pm \sqrt{\frac{p^2}{٤} - q}$ انجام میشود ؛ و نیز ملاحظه خواهند فرمود که قدما مثل امروز برای معادلهٔ مزبور دوجواب یافته‌اند ؛ بنابراین ریاضی دانان قدیم درجلوی رادیکالها علائم + و — مقدم میداشته ، یعنی میدانسته اند که عدد $\frac{۱}{٤}$ دارای دو جذر است یکی $+\frac{۱}{۲}$ ودیگری $-\frac{۱}{۲}$.

جدول با اصطلاحات قدیم برای حل معادلهٔ $x^2 + ۲ = ۳x$

عدد اشیاء	نصف آن	مجذور نصف عدد اشیاء	عدد	عددرا از مجذور نصف عدداشیاء کم میکنیم	جذر آن	نصف عدد اشیاءرا یکمرتبه بآن اضافه میکنیم	ومرتبهٔ دیگر ازآن کم میکنیم
۳	۱ ۱/۲	۲ ۱/٤	۲	۱/٤	۱/۲	۲	۱

قدما بعداز حل هرمسئله و بدست آوردن جواب یا جوابهای آن فوراً همچنانکه امروزه نیز معمول است و در کتب جبر دستور داده شده ، امتحان میکردند که آیا جواب یا جوابها صحیح است و درمسئله صدق میکند یا خیر ، مثلا درمورد مسئله بالا ، غیاث الدین جمشید پس‌از حل بوسیلهٔ جدول ، بامتحان پرداخته مینویسد :

امتحان ـ هرگاه کارگر مزبور ۲ روز کار کند اجرت او ٦ دینار بوده و اگر ۲ واحد ازآن کم کنیم عدد ٤ باقی میماند که مجذور ۲ میباشد ؛ و اگر یکروزکار کند اجرتش ۳ دینار بوده و پس‌از کم کردن عدد۲ ازآن ، یك واحد باقی میماند که مجذور واحد است .

مسئلهٔ ۲ ـ عددی پیدا کنید که اگر از دو برابرش یك واحد کم کرده و باقیمانده را در سه ضرب نمائیم و ازحاصل ۲ واحد کم کرده ونتیجه را در ٤ ضرب کنیم و ازعددی که بدست میآید ۳واحدنقصان نمائیم جذر باقیمانده‌مساوی $۲\frac{۱}{۳}$ همان عدد شود .

حل‌مسئله بطریق کنونی ـ ابتدا مسئله را بمعادله میگذاریم . طبق مفروضات مسئله چنین خواهیم داشت :

$$\sqrt{\left\{\left[۳(۲x-۱)-۲\right]\times ٤\right\}-۳} = ۲\frac{۱}{۳}x$$

یا : $$\sqrt{\left[(٦x-٥)\times ٤\right]-۳} = ۲\frac{۱}{۳}x$$

یا : $$\sqrt{۲٤x-۲۳} = ۲\frac{۱}{۳}x$$

یا $$۲٤x-۲۳ = \frac{٤۹}{۹}x^{۲}$$

یا $$\frac{٤۹}{۹}x^{۲}-۲٤x+۲۳ = ۰$$

ویا بالاخره $$x^{۲}-٤\frac{۲۰}{٤۹}x+٤\frac{۱۱}{٤۹} = ۰$$

اکنون باید این معادله را حل کنیم . طبق فرمول $x=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{\frac{p^۲}{۴}-q}$ چنین خواهیم داشت :

$$p=-\frac{۲۰}{۴۹}$$

$$q=۴\frac{۱۱}{۴۹}$$

و $$x=۴\frac{۲۰}{۴۹}\pm\sqrt{\left(۴\frac{۲۰}{۴۹}\right)^۲-۴\frac{۱۱}{۴۹}}$$

یا $$x=۴\frac{۲۰}{۴۹}\pm\sqrt{۴\frac{۲۰۶۰}{۲۴۰۱}-۴\frac{۱۱}{۴۹}}$$

یا $$x=۴\frac{۲۰}{۴۹}\pm\sqrt{\frac{۱۵۲۱}{۲۴۰۱}}$$

یا $$x=۴\frac{۲۰}{۴۹}\pm\frac{۳۹}{۴۹}$$

ودوجواب مسئله عبارتند از : $$x_۱=۴\frac{۲۰}{۴۹}+\frac{۳۹}{۹۴}=\boxed{۳}$$

و $$x_۲=۴\frac{۲۰}{۴۹}-\frac{۳۹}{۴۹}=\boxed{۱\frac{۲۰}{۴۹}}$$

حل مسئله بطریق قدیمـ عدد مطلوب را شیئی [۱] (x) فرض کرده و از ۲ برابرش یك واحد کم میکنیم خواهیم داشت دوشیئی منهای یك ($۲x-۱$) حاصل را در۳ ضرب میکنیم میشود ۶ شیئی منهای‌سه: ($۶x-۳$)

---

(۱) عبارات داخل پرانتز برای توضیح مطلب بترجمهٔ متن کتاب مفتاح الحساب اضافه شده است :

۲ تا از حاصل کم میکنیم میشود : شش شیئی منهای پنج :
$(۶x - ۵)$ ؛

حاصل را درچهار ضرب مینمائیم چنین بدست میآید : بیست و چهار شیئی منهای بیست : $(۲۴x - ۲۰)$ ؛

سه واحد از آن کم میکنیم میشود : بیست وچهار شیئی منهای بیست وسه :
$(۲۴x - ۲۳)$ ؛

و این معادل است با مجذور دو شیئی و ثلث شیئی : $\left(۲\frac{۱}{۳}x\right)^{۲}$ یا $\left(\frac{۷}{۳}x\right)^{۲}$ که مساویست با :

پنج و چهار نهم مجذور شیئی : $\left(۵\frac{۴}{۹}x^{۲} = \frac{۴۹}{۹}x^{۲}\right)$

پس چنین خواهیم داشت :

$$۳۴x - ۲۳ = ۵\frac{۴}{۹}x^{۲}$$

پس از انجام عمل جبر چنین خواهیم داشت :

$$۲۴x = ۵\frac{۴}{۹}x^{۲} + ۲۳$$

یا

$$۵\frac{۴}{۹}x^{۲} + ۲۳ = ۲۴x$$

ضریب x را بواحد تبدیل مینمائیم چنین بدست میآید :

$$x^{۲} + \frac{۹}{۴۹}۲۳ = ۲۴\frac{۹}{۴۹}x$$

وپس از اختصار :

$$x^{۲}x۴\frac{۱۱}{۴۹} = ۴\frac{۲۰}{۴۹}x$$

برای حل اینمعادله غیاث الدین جمشید جدول زیر را ترتیب دادهاست :

جدول برای حل معادلهٔ: $x^{2} + ۴\frac{۱۱}{۳۹} = ۴\frac{۲۰}{۴۹}x$

عدد اشیاء	نصفش	مجذور نصف عدد اشیاء	عدد	عددرا ازمجذور نصف عدد اشیاء کم میکنیم	جذرش	یکمرتبه آنرا بنصف عدد اشیاء اضافه میکنیم میشود:	ویکمرتبه جذررا ازنصف عدد اشیاء کم میکنیم میشود
$۴\frac{۲۰}{۴۹}$	$۲\frac{۱۰}{۴۹}$	$۴\frac{۲۰۶۰}{۲۴۰۱}$	$۴\frac{۱۱}{۴۹}$	$\frac{۱۵۲۱}{۲۴۰۱}$	$\frac{۳۹}{۴۹}$	۳	$۱\frac{۲۰}{۴۹}$

چنانکه از این دو مسئاله استنباط میشود قدما نیز مثل امروز برای حل معادلات درجهٔ دوم، ازجدولی استفاده میکردند که حکم فرمول $x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^{۲}}{۴} - q}$ را داشته و بسهولت وسرعت تمام معادلات درجهٔ دوم را از روی آن حل میکردند.

بحث درفرمول ــ در کتاب جبر سال چهارم طبیعی تألیف ۱۲ دبیر ریاضی که قبلا از آن یاد گردید در صفحات ۸۶ و ۸۷ پس از حل سه معادلهٔ کامل درجهٔ دوم ، در فرمول بحث کرده مینویسد :

« درضمن حل سه مثال اخیر از روی دستور :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

متوجه باشید که :

الف ــ وقتی مقدار زیر رادیکال مثبت باشد یعنی $b^2 - 4ax > 0$ معادله دارای دو ریشه است ؛

ب ــ وقتی مقدار زیر رادیکال برابر صفر یعنی $b^2 + 4ac = 0$ معادله دارای ریشهٔ مضاعف است ؛

ج ــ وقتی مقدار زیر رادیکال منفی باشد یعنی $b^2 - 4ac < 0$ معادله ریشه ندارد ؛

بعبارت دیگر $b^2 - 4ac$ را که در واقع مقدار آن بیان میکند معادله جواب دارد یا نه مبیّن معادلهٔ درجهٔ دوم گویند .

در بعضی از کتابهای جبر کنونی نیز که ضریب x^2 را در معادلات درجهٔ دوم مساوی واحد گرفته و معادله را از روی فرمول $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ نقل میکند چنین بحث مینماید :

اگر $\frac{p^2}{4} - q > 0$ باشد معادله دارای دو جواب یا دو ریشه است ؛

اگر $\frac{p^2}{4} - q = 0$ باشد معادله دارای یك ریشهٔ مضاعف است که مساوی با $-\frac{p}{2}$ میباشد .

اگر $\frac{p^{2}}{4} - q < 0$ باشد معادله جواب ندارد ؛ یا ریشهٔ معادله موهومی‌است.

تمام این بحث‌ها از کتاب جبر ومقابلهٔ خوارزمی سرچشمه گرفته است که مدت ۱۱۰۰ سال متوالیاً از کتابی بکتاب دیگر نقل شده و چنانکه سابقاً گفتیم امروزه با تغییر لباس یعنی تغییر دراصطلاحات علمی از راه اروپا بما رسیده و ریاضی دانان ما تصورمیکنند که ازتحقیقات دانشمندان اروپا میباشد.

درکتاب خوارزمی پس‌از حل معادلهٔ $x^{2} + 21 = 10x$ همین بحث را عیناً پیش میکشد. باین طریق که ابتدا معادله را طبق دستوری که قبلاً بآن اشاره کردیم حل میکند :

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^{2} - 21}$$
$$= 5 \pm \sqrt{25 - 21}$$
$$= 5 \pm \sqrt{4}$$
$$= 5 \pm 2$$

وپس‌از اینکه دوجواب برای معادله بدست میآورد مینویسد :

« واعلم انك اذا نصفت الاجذار فی هذا الباب وضربتها فی مثلها فکان مبلغ ذلك اقل من الدراهم التی مع المال فالمسئلة مستحیلة وان کان مثل الدراهم بعینها فجذر المال مثل نصف الاجذار سوا لا زیادة ولا نقصان».

ومنظور اوازاین عبارت اینست که اگر $\frac{p^{2}}{4} < q$ یعنی $\frac{p^{2}}{4} - q < 0$ باشد معادله جواب ندارد وبجای کلمهٔ «مستحیل» که بکار برده است امروز کلمهٔ «موهومی» را بکار میبرند ؛ واگر $\frac{p^{2}}{4} = q$ یعنی $\frac{p^{2}}{4} - q = 0$ باشد معادله فقط یك جواب دارد آنهم مساوی $-\frac{p}{2}$ است.

توضیح ـ معنی اصطلاحات ریـاضی کـه در این عبارت عربی آورده شده بقرار زیر است :

اجذار یعنی ضریب x که p میباشد و نصف‌الاجذار یعنی $-\frac{p}{۲}$ ؛

مال یعنی $x^۲$ وجذرالمال یعنی x ؛

دراهم یعنی جملهٔ معلوم که q باشد ؛

مستحیله یعنی موهومی یا ممتنع و شارح کتاب آنرا :

The instance is impossible ترجمه کرده و Cannot happen نیزمینویسد ؛

***

تبصره ـ ریاضیون قدیم ایـران معادلهٔ کامل درجهٔ دوم $x^۲ + px + q = ۰$ را برحسب اینکـه ضریب x وحملهٔ معلوم درآن مثبت یا منفی باشد بسه شکـل نمایش داده و هر کدام را یك صنف مینامیدند وراه حل‌هریك‌ازآنهاراجدا گانه با استدلال‌هندسی‌تعیین مینمودند، ولی سرانجام‌فرمول کلی $x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^۲}{٤} - q}$ برای حل هرسه صنف معادله بدست میآمد .

سه صنف معادلات مزبورعبارتند از :

۱ـ ضریب x مثبت وجملهٔ معلوم منفی است ، مثال :

$$x^۲ + ۱۰x - ۳۹ = ۰$$

۲ـ ضریب x منفی وجملهٔ معلوم مثبت است ، مثال :

$$x^۲ - ۱۰x + ۲۱ = ۰$$

۳ـ ضریب x منفی وجملهٔ معلوم نیز منفی است ، مثال :

$$x^۲ - ۳x - ٤ = ۰$$

ضمناً بـاید تـوجه داشت کـه قدما جملهٔ منفی را با تغییر علامت بطرف دیگر معادله نقل میکردند که تمام جمل مثبت باشد ، بنابراین سه‌صنف معادلات

بالارا بترتیب چنین مینوشتند :

$$x^۲ + ۱۰x = ۳۹$$

$$x^۲ + ۲۱ = ۱۰x$$

$$x^۲ = ۳x + ٤$$

چون ریاضیون قدیم ، حروف و علامات کنونی را درمعادلات بکارنمیبردند . لازم است بدانیم چه اصطلاحاتی بجای آنها معمول میداشته‌اند ؛ پس گوئیم بجای x کلمهٔ **شیئی** رابکار میبردند ومجذور آنرا که $x^۲$ باشد **مال**مینامیدند وچندین $x^۲$ یا $ax^۲$ را **چند مال** یابطور کلی **اموال** میگفتند، وچون x جذر $x^۲$ میباشد لذاآنرا معمولابنام **جذر** نامیده و px را **چندجذر** یا **اجذار** یا **جذور**میگفتند؛ و بالاخره مقدار معلوم یعنی q را **عدد** مینامیدند ؛ پس برای تعریف سه صنف معادلهٔ بالا بترتیب چنین میگفتند :

(۱) اموال وجذور تعدل عددا یعنی مال‌ها وجذرها معادل باعدد است :

$$(ax^۲ + bx = c)$$

(۲) اموال وعدد تعدل جذورا یعنی مال ها وعدد معادل با جذرها است :

$$(ax^۲ + c = bx)$$

(۳) جذور و عدد تعدل اموالا یعنی جذرها و عدد معادل بامال ها است :

$$(ax^۲ = bx + c)$$

✡✻✡

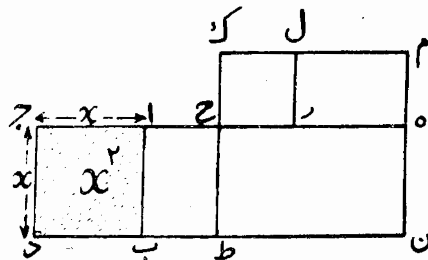
صنف‌اول را که نمونهٔ عددی‌آن معادله $x^۲ + ۱۰x = ۳۹$ میباشد بابرهان هندسی درصفحهٔ ۳۲ حل کردیم و راه حل را کـه منجر به پیدا کـردن فرمول میگردد بیان داشتیم .

✻✡✻

اینك بحل **صنف‌دوم** ازمعادلات مزبور میپردازیم ؛ مثلا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم :

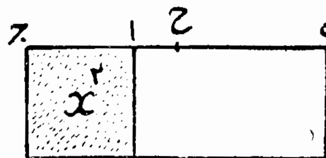
$$x^۲ + ۲۱ = ۱۰x$$

مربعی میسازیم که طول هر ضلع آن مساوی x یعنی مقدار مجهول باشد (ش۳)
و آن مربع ا ب د ج میباشد[۱] سپس ضلع ج ا را باندازهٔ ا ه امتداد میدهیم
بطوریکه ج ه مساوی ۱۰ یعنی برابر ضریب x گردد و مربع مستطیل ج ن
را بنا میکنیم . مساحت این مربع مستطیل که عرضش x وطولش ۱۰ است مساوی
۱۰x خواهد بود و آن معادل است با : سطح مستطیل ن ا + سطح مربع ا د
پس طبق معادلهٔ مفروض ۲۱ = سطح مستطیل ن ا خواهد بود

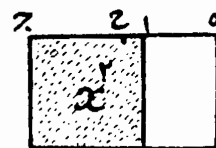


(ش۳)

حال ضلع ج ه را نصف میکنیم ؛ دوحالت ممکن است اتفاق افتد :
درحالت اول ا ج کوچکتر از نصف ه ج (ه ج = ۱۰ = ضریب x میباشد)
(ش۴) است و درحالت دوم ا ج بزرگتر از نصف ه ج میباشد (ش۵)



(ش۴)



(ش۵)

---

(۱) برای سهولت گفتار من بعد هر مربع یا بطور کلی هر مسطح را بجای چهار حرف با دو
حرف که در دو رأس مقابل قرار داده شده نمایش میدهیم مثلا دراینجا گوئیم مربع ا د

درحالت اول نقطه ح وسط ه ج میباشد(ش۳) پس :

$$۵ = \frac{۱۰}{۲} = \text{خط ح ه} = \text{خط ج ح}$$

سپس خط ط ح را کـه مساوی ج د یعنی x است بـاندازهٔ ح ك = ح ا امتداد میدهیم وچنین خواهیم داشت :

$$۵ = \text{ج ح} = \text{ط ك}$$

حال برروی ضلع ط ك مربع ط م را بنا میکنیم ؛ چون طول هرضلع ایـن مربع مساوی ۵ است ، بنابراین مساحت آن ۲۵ خواهد شد که در حقیقت مربـع یا مجذور نصف ضریب x است :

$$۲۵ = \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{p}{۲}\right)^۲ = \frac{p^۲}{٤}$$

و میدانیم که مساحت مربع مستطیل ه ب مساوی ۲۱ بوده و مستطیل ط ا از آن جدا شده است . اکنون خط ك ل را باندازهٔ ك ح جدا کرده مربع ح ل را میسازیم ؛ وگـوئیم خط ط ح مساوی خط م ل است ؛ پس سطح م ر مساوی سطح ط ا میشود ؛ بنابراین :

۲۱ = سطح ه ب = سطح ط ا + سطح ه ط = سطح م ر + سطح ه ط

وچون ۲۵ = سطح م ط میباشد

پس اگر سطوح ه ط و م ر را از سطح م ط کم کنیم مربع کوچك ر ك باقی میماند ؛ بنابراین مساحت مربع کوچك ر ك مساویست با :

$$۲۵ - ۲۱ = ٤$$

وجذر آن مساوی است با خط ر ح که آنهم مساویست باخط ح ا

پس :

$$۲ = \sqrt{٤} = \sqrt{۲۵ - ۲۱} = \text{خط ح ا} = \text{خط ر ح}$$

واگر آنرا از خط ح ج که مساوی $\frac{۱۰}{۲} = ۵$ یا نصف ضریب x است کم کنیم خط ا ج باقی میماند پس :

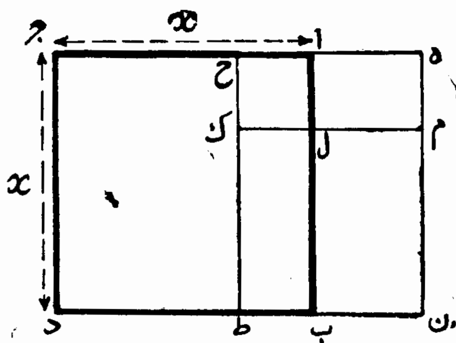
$$x = \text{خط ا ج} = ۵ - ۲ = ۳$$

درحالت دوم ـ نظیر همان استدلالات را با مختصر اختلافی در وضع حروف تکرار میکنیم ونتیجه این میشود که باید عدد ۲ را که نمودار خط ح ا میباشد به خط ح ج که مساوی $\frac{۱۰}{۲} = ۵$ یا نصف ضریب x است بیفزائیم تا خط ا ج یا x بدست آید (ش۶) پس :

$$x = \text{خط ا ج} = ۵ + ۲ = ۷$$

وباینطریق میبینیم که معادلهٔ $x^۲ + ۲۱ = ۱۰x$ دو جواب دارد

$$x_۲ = ۷ \quad \text{و} \quad x_۱ = ۳$$



(ش۶)

درحالت مخصوص ح ا مساوی صفر بوده یعنی نقطهٔ ح بر ا منطبق میباشد؛ در اینصورت x یعنی ا ج نصف ه ج یا نصف ضریب x خواهد بود ؛ و این حالت منطبق است با حالتی که درفرمول :

$$x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^۲}{۴} - q}$$

مقدارزیر رادیکال وبنابراین خودرادیکال مساوی‌صفر باشد که‌دراینصورت:

$x = -\frac{p}{2}$ وامروزه میگویند معادله دارای ریشهٔ مضاعف است.

✲✲✲

بـرای حل صنف سوم از معادلات درجهٔ دوم مثلا معادلـهٔ $x^2 = 3x + 4$ خوارزمی باز متوسل ببرهان هندسی نظیر آنچه که درصنف اول ودوم بیان داشتیم گردیده که برای رعایت اختصار در این رساله ازشرح آن صرف نظر کردیم.

✲✲✲

ریاضیون قدیم ایران نه تنها بـرای حل معادلات جبری بلکـه برای حل بسیاری از مسائل ریاضی و تعیین مقادیر و انـدازه گیریهای هندسی دستوراتـی داشته‌اند کـه با فرمولهای امروزه کاملا مطابق است. بعبارت دیگـر فرمولهای کنونی اقتباس از دستورات قدماست با این تفاوت که بجای اصطلاحات و عبارات ریاضی قدیم متأخرین حروف وعلامات را بکار بُرده‌اند. ۲

مثلامیدانیم که مساحت مثلث مساویست باحاصلضرب قاعده درنصف‌ارتفاع، ولی اگر ارتفاع در دست نباشد و سه ضلع مثلث بابعداد a وb وc معلوم باشد، مساحت S مثلث را بوسیلهٔ فرمول زیر تعیین میکنند:

$$S = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

در کتاب مفتاح الحساب عین این دستور منتها با عبارت زیر دیده میشود:

« تفاضل هریك از اضلاع مثلث را از نصف مجموع اضلاع گرفته و این تفاضل‌هارا دریکدیگر ضرب کرده و حاصل‌رادرنصف مجموع اضلاع‌ضرب نموده وجذر حاصل‌را بدست‌آورید وآن مساحت مثلث خواهد بود. »

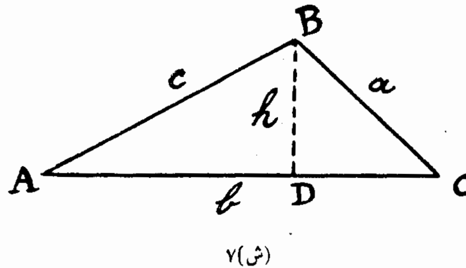
وبرای روشن شدن مطلب مثال زیررا میآورد:

فرض میکنیم یکی ازاضلاع مثلث ۱۰ وضلع دیگر۱۷وضلع سوم۲۱باشد، در اینصورت نصف مجموع اضلاع مساوی ۲۴ خواهد بود وتفاضل آن از۱۰مساوی

۱۴ واز ۱۷ مساوی۷ و از ۲۱ مساوی ۳ میباشد . اکنون ۱۴ را در۷ ضرب‌میکنیم ۹۸ بدست میآید و آنرا در۳ ضرب میکنیم ۲۹۴ بدست میآید ، آنرا در ۲۴ که نصف مجموع اضلاع است ضرب مینمائیم عدد ۷۰۵۶ بدست خواهدآمد جذرآنرا میگیریم ۸۴ میشود وهوالمطلوب .

برای اینکه تا اندازه ای به حدّت ذهن و میزان ذکاوت و هوش ریاضی ـ دانان قدیم جهت پیدا کردن این قبیل فرمولها پی‌ببریم راهی را کـه امروزه در کتابها برای تعیین مساحت مثلث بکار میبرند و منجر به کشف همین فرمول‌میشود شرح میدهیم وآن اینست :

فرض میکنیم سه ضلع a وb وc مثلث ABC معلوم باشد (ش۷) و بخواهیم



(ش۷)

از روی آن ، مساحت این مثلث را بدست آوریم . برای اینکار ارتفاع BD = h را رسم میکنیم ، و فـرض مینمائیم DC = m تصویر ضلع BC بر AC باشد . در هندسه ثابت شده است که :

$$c^{2} = a^{2} + b^{2} - 2bm$$

(درهرمثلث مربع ضلع مقابل بزاویهٔ حاده مساویست بـا مجموع مربعین دو ضلع دیگر منهای مضاعف مسطح یکی ازآن دو ضلع در تصویر ضلع دوم بر همین ضلع)

وازآنجا :

$$m = \frac{a^{2} + b^{2} - c^{2}}{2b}$$

وازطرف دیگر درمثلث BDC داریم :

$$h^{۲} = a^{۲} - m^{۲}$$

بجای m مقدار آنرا که از رابطهٔ بالا بدست‌آورده‌ایم میگذاریم ، میشود :

$$h^{۲} = a^{۲} - \left(\frac{a^{۲} + b^{۲} - c^{۲}}{۲b}\right)^{۲}$$

یا :

$$h^{۲} = \frac{۴a^{۲}b^{۲} - (a^{۲} + b^{۲} - c^{۲})^{۲}}{۴b^{۲}}$$

صورت این کسر تفاضل مجذور دومقدار است ، آنهارا بعوامل خودتجزیه میکنیم :

$$h^{۲} = \frac{(۲ab + a^{۲} + b^{۲} - c^{۲})\ (۲ab - a^{۲} - b^{۲} + c^{۲})}{۴b^{۲}}$$

صورت را در ۱ ـ ضرب میکنیم وبرای اینکه تغییری در کسر داده نشود در دو رابطهٔ پائین‌تر مجدداً آنرا در ۱ ـ ضرب مینمائیم و پس از تجزیهٔ متوالی بعامل‌ها مرتباً چنین حاصل میشود :

$$h^{۲} = \frac{[(a+b)^{۲} - a^{۲}]\ [(a-b)^{۲} - c^{۲}]}{۴b^{۲}}$$

$$h^{۲} = \frac{[(a+b+c)\ (a+b-c)]\ [(a-b+c)\ (a-b-c)]}{۴b^{۲}}$$

$$h^{۲} = \frac{[(a+b+c)(a+b-c)]\ [(a-b+c)\ \ (b+c-a)]}{۴b^{۲}}$$

اگر نصف مجموع اضلاع مثلث یعنی نصف محیط را به N بنمائیم خواهیم داشت :

$$a + b + b = ۲c$$

ومرتباً چنین بدست میآید :

$$a + b - c = ۲N - ۲c = ۲(N - c)$$

$$a - b + c = ۲N - ۲b = ۲(N - b)$$

$$b + c - a = ۲N - ۲a = ۲(N - a)$$

وازآنجا :

$$h^2 = \frac{2N \times 2(N-c) \times 2(N-b) \times 2(N-a)}{4b^2}$$

ویا :

$$h^2 = \frac{4N(N-a)(N-b)(N-c)}{b^2}$$

و

$$h = \sqrt{\frac{4N(N-a)(N-b)(N-c)}{b^2}}$$

یا :

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{N(N-a)(N-b)(N-c)}$$

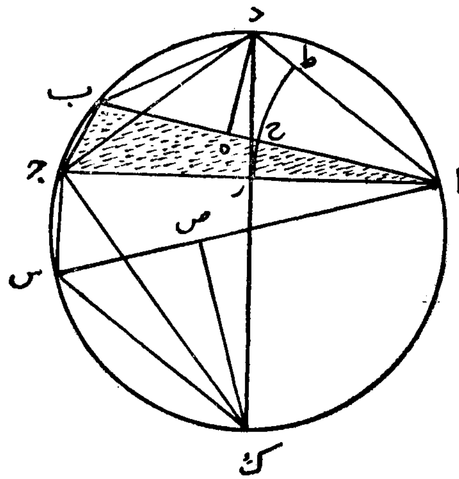
وچون مساحت مثلث ABC مساویست با حاصلضرب قاعدهٔ b درنصف‌ارتفاع h پس :

$$S = b \times \frac{h}{2} = b \times \frac{2}{2b}\sqrt{N(N-b)(N-b)(N-c)}$$ مساحت مثلث

ویا بالاخره :

$$S = \sqrt{N(N-a)(N-b)(N-c)}$$

قدما با در دست داشتن اندازهٔ سه ضلع مثلث همین فرمول را ازراه‌برهان هندسی پیدامیکردندوابوریحان بیرونی‌طریق‌عمل‌آنرادر کتاب«رسائل‌البیرونی» شرح داده و آنرا به ارشمیدس نسبت میدهد ؛ وچون این راه تا اندازه‌ای‌پیچیده وبغرنج است ازشرح‌آن صرف نظر کرده وفقط تصویرآنرا دراینجا رسم میکنیم. (ش۸)



(ش۸)

گفتار سوم

چند نمونه از دستورات وقواعدی که درجبر و مقابلهٔ دانشمندان اسلامی ذکر شده است

ریاضیون اسلامی قوای متوالی اعداد را میشناخته واستخراج جذر و کعب و ریشه های بالاتر را میدانسته و راجع به ریشه‌های منطق و اصّم مطالبی بیان کرده‌اند که با گفته‌های امروزی مطابقت دارد ؛ و غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب مفتاح الحساب طی پنجاه قاعده قضایای مربوط به قوا و ریشه‌ها و تصاعدات و تناسبات وغیره راکه درحل‌مسائل جبری مورد احتیاج واقع میشوند شرح داده که برای نمونه بعضی از آنهارا ذکر وباموازین علمی کنونی تطبیق میکنیم .

۱ــ در کتاب جبر و مقابلهٔ وحید جلد اول صفحهٔ ۱۲٤ مینویسد :

قضیه ـ حاصلضرب چندین رادیکال دارای یك نماینده رادیکالی است که نماینده‌اش همان نمایندهٔ مشترك ومقدار واقع در زیرش حاصلضرب مقادیرواقعه

در زیر رادیکالهای عامل باشد .

یعنی :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{abc}$$

زیرا اگر طرفین تساوی فوق را مکعب کنیم درهردوطرف حاصل مساوی abc میشود .

مثال : $\sqrt{۲} \times \sqrt{۳} = \sqrt{٦}$ (ومثالهای دیگر نیز میآورد که از نقل آن صرفنظر میکنیم) .

در کتاب مفتاح الحساب این قضیه را در قاعدهٔ اول بترتیب زیر بیان میدارد :

اگر بخواهیم جذر عددی را درجذر عدد دیگر یا جذر جملهای‌را درجذر جملهٔ دیگر که درجه‌اش با درجهٔ جملهٔ مزبور فرق داشته باشد ضرب کنیم بایـد دوعدد یا دو جمله را در یکدیگر ضرب کرده جذر حاصل را استخراج نمائیم . ومثالهائی میآورد که ما دوتا از آنها را باعلامات وحروف کنونی نشان میدهیم :

$$\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۲ \times ۸} = \sqrt{۱٦} = ٤$$

$$\sqrt{۹x^{۲}} \times \sqrt{۲٥x^{٤}} = \sqrt{۲۲٥x^{٦}} = ۱٥x^{۳}$$ و

تبصره ـ برای ضریب دو یا چند رادیکال که دارای یك نماینده نبوده بلکه نماینده‌های مختلف دارند ابتدا نماینده‌هارا یکی کرده سپس عمل فوق را انجام میدادند مثلا برای ضرب $\sqrt{۹x^{٤}} \times \sqrt[۳]{۸}$

بترتیب چنین عمل میکردند :

$$\sqrt{۹x^{٤}} \times \sqrt[۳]{۸} = \sqrt[٦]{(۹x^{٤})^{۳}} \times \sqrt[٦]{۸^{۲}} =$$

$$\sqrt[٦]{(۹x^{٤})^{۳} \times ۸^{۲}} = \sqrt[٦]{۷۲۹x^{۱۲} + ٦٤} =$$

$$\sqrt[٦]{٤٦٦٥٦\, x^{۱۲}} = ٦x^{۲}$$

البته ریشهٔ ششم عدد ٤٦٦٥٦ را از روی جدولی باقواعد معین استخراج میکردند .

قضیه ـ خارج قسمت دو رادیکال دارای یك نماینده، رادیکالی است که نماینده اش همان نمایندهٔ مشترك و مقدار واقع در زیرش خارج قسمت مقادیر واقعه در زیر رادیکالهای مقسوم ومقسومٌ علیه باشد یعنی :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

زیرا

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{b} = \sqrt{\frac{ab}{b}} = \sqrt{a}$$

مثال

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢٧}} = \sqrt{\frac{٣}{٢٧}} = \frac{١}{٣}$$

و

$$\frac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}} = \sqrt[٣]{\frac{١٦}{٢}} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$$

این قضیه نیز در کتاب مفتاح الحساب ذکر شده که ما ترجمهٔ آنرا ذیلا نقل میکنیم :

درتقسیم نیز همین حکم جاری است یعنی اگر بخواهیم جذرعددی یاجملهٔ جبری را بر جذر عددی یا جملهٔ دیگر تقسیم کنیم مجذور مقسوم را بر مجذور مقسومٌ علیه تقسیم کرده وجذر خارج قسمت را استخراج میکنیم . مثال :

$$\frac{\sqrt{٣٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٣٢}{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

٢ـ در جبر وحید جلد ٣ صفحهٔ ٨٠ مینویسد :

سلسله اعداد صحاح تصاعد حسابی تشکیل میدهند که جملهٔ اول و قدر

نسبتش ۱ میباشد مطلوبست حـاصل جمع n جملهٔ اوایـل آن چـون در دستور $S = n \times \frac{۲a + (n - ۱)r}{۲}$ (a جمله اول ، n عدهٔ جمل ، r قدرنسبت و S حاصلجمع تصاعد حسابی میباشد)

بجای حروف مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود :

$$S = n \times \frac{۲ \times ۱ + (n - ۱) \times ۱}{۲} = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

مثلا حاصلجمع هشتاد جملهٔ اول آن مساویست با :

$$S = \frac{۸۰ \times (۸۰ + ۱)}{۲} = ۳۲٤۰$$

درمفتاح الحساب قاعدهٔ مزبور را چنین مینویسد :

اگر بخواهیم سلسلهٔ اعداد متوالیه را ازواحد تا عدد مفروضی باهم جمع کنیم عدد یك را باعدد مزبور جمع کرده و مجموع را در نصف همان عددضرب میکنیم ؛ مثال ـ میخواهیم سلسلهٔ اعداد متوالیه را از یك تا ده با هم جمع کنیم حاصل چنین میشود :

$$(۱۰ + ۱) \times \frac{۱۰}{۲} = ۵۵$$

واگر بخواهیم حاصلجمع اعداد متوالیه را ازغیر واحد تا هرعددی کـه بخواهیم بدست آوریم دوعدد طرفین یعنی کوچکترین وبزرگترین اعدادراباهم جمع کرده و حاصل جمع را درنصف عدهٔ این اعداد ضرب مینمائیم .

مثال ـ میخواهیم جمع اعداد متوالیه از ۳ تا ۱۰ را بدستآوریم ۳را با۱۰ جمع میکنیم میشود ۱۳ و آنرا در نصف عدهٔ جمل یعنی ٤ ضرب مینمائیم نتیجه چنین میشود : $۱۳ \times ٤ = ۵۲$

۳ـ درجبر وحید جلد۳ صفحهٔ ۸۰ مینویسد :

سلسلهٔ اعداد صحاح فرد تصاعد عددی تشکیل میدهند که جملهٔ اول آن ۱ و قدر نسبتش ۲ میباشد مطلوبست حاصل جمع n جملهٔ اول آن تصاعد.ــ ازدستور $S = n \times \frac{۲a + (n-۱)r}{۲}$ میتوان چنین داشت :

$$S = n \times \frac{۲ + (n-۱)۲}{۲} = n^۲$$

مثلا حاصل جمع هشت جملهٔ اول آن مساویست با :

$$S = ۸^۲ = ۶۴$$

و در مفتاح الحساب چنین مینویسد : اگر بخواهیم اعداد متوالی فرد را با یکدیگر جمع کنیم برعدد فردآخری یك واحد افزوده ونصف حاصل راکه عدهٔ این اعداد فرد است[۱] در نفس خود ضرب مینمائیم .

مثال ــ مطلوب جمع اعداد فرد متوالی از یك تا نه است . یك واحد به نه میافزائیم میشود ده ، مجذورنصف آن که ۲۵ است حاصل‌جمع مطلوب‌خواهدبود.

۴ ــ در جبر وحید جلد ۳ صفحهٔ۸۱ مینویسد :

سلسلهٔ اعداد صحاح زوج تصاعد حسابی تشکیل‌میدهند که جملهٔ اول‌وقدر نسبتش ۲ میباشد مطلوبست تعیین حاصل جمع n جملهٔ اول آن تصاعد چون در دستور فوق الذکر بجای حروف مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود :

$$S = n\frac{۲ \times ۲ + (n-۱)۲}{۲} = n(n+۱)$$

مثلا حاصل جمع نه جملهٔ اول آن مساویست :

$$S = ۹(۹+۱) = ۹۰$$

درمفتاح الحساب مینویسد : اگر بخواهیم حاصل جمع اعداد زوج متوالی را بدست آوریم ، نصف‌آخرین زوج یعنی عدهٔ این اعداد زوج را درهمین عده باضافهٔ یك ضرب میکنیم .

---

(۱) یعنی n

مثال . ـ میخواهیم حاصل جمع اعداد زوج متوالی از ۲ الی ۱۰ را بدست آوریم . عدد ۵ را در ۶ ضرب میکنیم میشود ۳۰ فهو المطلوب .



از توجه بمطالب بالا معلوم میشود که چگونه اکثر دستورات وقواعد ریاضی امروزه طابق النّعل بالنّعل اقتباس از تحقیقات علمی قدما است وچون در اینجا از تصاعد حسابی گفتگو میکنیم ، برای مزید استحضار خوانندگان دو قضیهٔ اصلی تصاعدات حسابی را نیز از روی کتابهای کنونی ذکر کرده و آنها را با مندرجات کتاب مفتاح الحساب تطبیق میدهیم .

در کتابهای امروز برای اینکه مقدار جملهٔ مرتبهٔ n ُام در یک تصاعد عددی بدست آید قضیه وفرمول زیر را ذکر میکنند :

قضیه ـ مقدار جملهٔ مرتبهٔ n ُام ـ مقدار l جملهٔ n ُام تصاعد عددی که جملهٔ اولش a وقدر نسبتش r باشد مساویست با :

$$l = a + (n - ۱)r$$

و برای تعیین حاصل جمع جمل یك تصاعد حسابی قضیه و فرمول زیر را دستور میدهند :

قضیه ـ حاصل جمع هر تصاعد حسابی محدود مساویست بحاصل ضرب عدهٔ جمل در نصف مجموع دوجملهٔ طرفین :

$$S = n \times \frac{a + l}{۲}$$

اگر در دستور فوق بجای l مقدارش $a + (n - ۱)r$ را قرار دهیم دستور ذیل بدست میآید :

$$S = n \times \frac{۲a + (n - ۱)r}{۲}$$

این دوقضیه با فرمولهائی که ذکرشد درکتاب مفتاح الحساب ضمن قاعدهٔ هفتم بیان شده است باین شرح :

اگر بخواهیم حاصل جمع سلسله اعدادی راکه تفاضل هردو عدد متوالی آن مقدار ثابتی باشد(۱) بدستآوریم ، باید از عدهٔ جمل آن یك واحد کم کرده(۲) وحاصلرا در تفاضل دو عدد متوالی(۳) ضرب نموده(٤) وآنچه بدست میآید با عدد کوچکتر(٥) جمع کنیم تا عدد بزرگتر(٦) بدستآید(۷) و مجدداً عدد کوچکتر را برآن افزوده وحاصلرا درنصف عدهٔ جمل ضرب نمائیم تاحاصل جمع مطلوب بدستآید(۸).

محاسبات ومسائل دیگری نیز امروزه درکتابها ضمن بحث از تصاعدات عددی مطرح شده که در بادی امر تصور نمیرود قدما آنها را مورد مطالعه قرار داده باشند ؛ ولی با کمال تعجب میبینیم که این مسائل را نیزآنها درکتابهای خود ذکر کرده اند . مثلا مجموع مکعبات n عدد صحیح اول ۱و۲و۳و٤... را درکتب جدید بوسیلهٔ فرمولی تعیین کرده ونشانداده‌اند که‌این‌مجموع‌مساویست با مجذور مجموع آنها (۱).

---

(۱) چنین سلسله اعدادی تشکیل یك تصاعد حسابی میدهد که تفاضل هر دو عدد متوالی قدر نسبت آن میباشد .

(۲) یعنی $n-1$

(۳) یعنی درقدرنسبت

(٤) که $(n-1)r$ میشود

(٥) یعنی جملهٔ اول

(٦) یعنی جملهٔ nام

(۷) با علائم کنونی چنین میشود $l = a + (n-1)r$

(۸) واین حاصل جمع همان فرمول $S = n \times \frac{2a + (n-1)r}{2}$ است .

(۱) جبر وحید جلد ۳ صفحهٔ ۸۳.

وآنگاه می‌بینیم که درمفتاح الحساب نیز همین موضوع در قاعدهٔ سیزدهم بعبارت زیر بیان شده است :

« اذا اردنا ان نجمع مکعّبات الاعداد المتوالیة من الواحد الی کم شیئاً ضرب مجموع تلك‌الاعداد فی‌نفسه یحصل‌المطلوب » .

یعنی : « اگر بخواهیم مجموع مکعّبات اعداد متوالیه را ازواحد تا هر عدد مفروضی بدست آوریم مجموع این اعدادرا درنفس خود ضرب میکنیم عدد مطلوب بدست خواهدآمد .»



اکنون به قضایائی در تصاعدات حسابی برخورد میکنیم که در کتب جدید قید نشده ولی قدما آنها را مطرح نموده اند . از جمله در قاعدهٔ هشتم چنین میگویند :

سلسلهٔ اعداد زیر را :

۱ ۳ ٦ ۱۰ ۱٥ و......

درنظر گرفته و تفاضل بین هردوجمله را بتوالی یکدیگر مینویسیم :

۲ ۳ ٤ ٥ و......

می بینیم که تفاضل های مزبور تشکیل یك تصاعد حسابی میدهند که قدر نسبت آن یك است ؛ بنابراین در سلسله اعدادی که درنظر گرفتیم اختلاف بین هردو جملهٔ متوالی مرتباً یك واحد افزایش می‌یابد .

همچنین در سلسله اعداد :

۱ ٤ ۹ ۱٦ ۲٥ و......

می‌بینیم که تفاضل بین هر دو جملهٔ متوالی مرتباً ۲ واحد افزایش پیدا میکند زیرا تفاضل‌های مزبور عبارتند از :

۳ ٥ ۷ ۹ و......

وبهمین طریق میتوان سلسله اعدادی را در نظر گرفت که تفاضل هردو جملهٔ متوالی آن ۳ یا ٤ یا ٥ یا .... هرمقدار که بخواهیم باشد افزایش یابد ؛ در اینصورت مطلوب پیدا کردن حاصل جمع چند جملهٔ اول از سلسله اعدادی است که تفاضل بین هردو جملهٔ متوالی آن مرتباً باندازهٔ عدد مفروضی افزوده شود؛ مثلا تعیین کنید حاصل جمع ۱۰ جملهٔ اول از سلسله اعدادی که از واحد شروع شده و تفاضل بین هردو جملهٔ متوالی آن مرتباً ۳ واحد افزایش پیدا کند . برای بدست آوردن حاصل جمع مزبور از عدهٔ جمل که ۱۰ است یك واحد کم میکنیم عدد ۹ بدست میآید ؛ آنرا در ۳ که ازدیاد تفاضلها است ضرب میکنیم حاصل ۲۷ میشود ؛ آنرا در ٥٥ که حاصل جمع ده جملهٔ اول سلسلهٔ اعداد بشماره طبیعی از ۱ تا ۱۰ است ضرب میکنیم ٥٥۰ بدست میآید و آن عدد مطلوبست .



و بهمین ترتیب ریاضیون قدیم ایران قضایا و قواعد مربوط به تصاعدات هندسی وسپس انواع نسبت ها و اتحادهارا که همهٔ آنها امروزه در کتب جبر و هندسه موجود است بیان داشته اند . مثلا دربارهٔ اتحادها مینویسند :

مربع مجموع دو مقدار مساویست با مربع یکی از آنها باضافهٔ مربع دیگری باضافه دو برابر حاصلضرب یکی از آنها در دیگری و این مطلب باعلائم کنونی چنین میشود :

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

ونیز حاصل ضرب مجموع دومقدار در تفاضل همان دومقدار مساویست با تفاضل مجذور آنها یعنی :

$$(a+b)\ (a-b) = a^۲ - b^۲$$

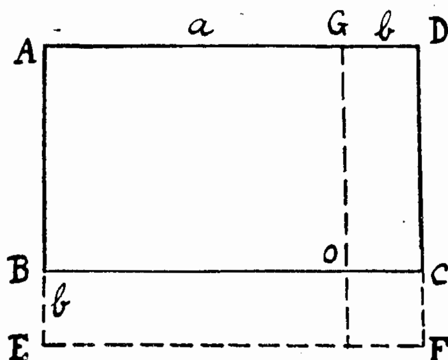
واین قبیل قضایارا بابرهان هندسی ثابت میکردند ؛ مثلا درمورد :

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

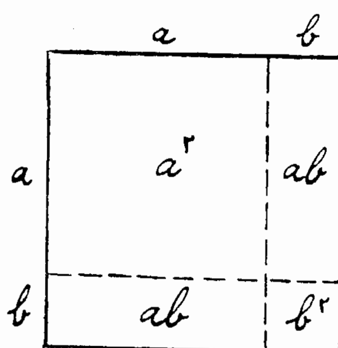
مربعی بطول $a+b$ رسم میکردند وبطوریکه از روی (شکل ۸) پیداست تساوی مزبور ثابت میگردید؛ ودرمورد: $(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$ مستطیل ABCD

(ش۹) را که عبارت از مسطح $a+b$ در $a-b$ است رسم‌میکردند وازروی شکل پیداست که :

$$(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$$



(ش۹)



(ش۸)

از آنچه تا کنون مختصراً ذکرشد چنین استنباط میشود که اساس و بنیان علم جبر ومقابلهٔ کنونی همانست که قدما طرح ریزی کرده و قواعد وقوانین آنرا بیان‌داشته وبسیاری از فرمولهای جبری‌را نیز بدست‌آورده بودند؛ معادلات درجهٔ اول و دوم را بخوبی‌حل کرده وراه حل معادلات درجهٔ سوم را نیزچنانکه خواهیم دید معین نموده اند ، و در تمام این موارد متأخرین چیزی برپیشینیان نیفزوده مگراینکه علامات وحروف را جانشین مفهومات و عبارات ریاضی نموده‌اند .

***

☆(بخش دوم)☆

☆(اکتشافات خیام در جبر و مقابله)☆

جرج سارتن استاد تاریخ علوم در دانشگاه هاروارد که یکی از اجلّهٔ مورخان علوم قرن بیستم (۱۹۵۷ـ۱۸۸٤) است در یکی از مؤلفات خود بنام «مدخل تاریخ علوم» راجع به خیام چنین مینویسد :

« عمر خیام یکی از بزرگترین ریاضیون قرون وسطی است ؛ کتاب جبر او حاوی‌حل‌هندسی وجبری معادلات درجهٔ دوم ، طبقه بندی قابل تحسین معادلات درجات اول ودوم وسوم و تحقیق منظم درحل تمام وحل ناتمام اغلب آنهااست.»

خیام معادلات درجهٔ اول و دوم و سوم را ابتدا به معادلات دو جمله ای و سه جمله‌ای و چهارجمله‌ای بطریق زیر تقسیم بندی میکند :

۱ـ معادلات دوجمله‌ای یا مفردات (۱)

$a = x^3$	$*a = x^2$	$* \quad a = x$
$ax = x^3$	$ax^2 = x^3$	$* \quad ax = x^2$

۲ـ معادلات ۳ وچهارجمله‌ای یامقترنات

الف ـ مقترنات سه جمله‌ای شامل ۱۲ صنف اند :

سه صنف بین عدد و x و x^2 :

---

(۱) معادلاتی که درجلوی آنها علامت * دیده میشود قبل‌از خیام حل و بحث شده‌اند .

$$*\begin{cases} x^2+ax=b \\ x^2+b=ax \\ x^2=ax+b \end{cases}$$

سه صنف بین x و x^2 و x^3

$$(1)\ *\begin{cases} x^3+ax^2=bx \\ x^3+bx=ax^2 \\ x^3=ax^2+bx \end{cases}$$

شش صنف بین عدد و x و x^3 یا عدد و x^2 و x^3 :

$$\begin{cases} (1)\ x^3+Bx=C \\ (2)\ x^3+C=Bx \\ (3)\ x^3=Bx+C \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4)\ x^3+Ax^2=C \\ (5)\ *x^3+C=Ax^2 \\ (6)\ x^3=Ax^2+C \end{cases}$$

ب ـ مقترنات چهارجمله‌ای شامل هفت صنف اند . چهارصنف که در آنها یکی از مراتب معادل مجموع سه مرتبهٔ دیگر است :

$$\begin{cases} (7)\ x^3+Ax^2+Bx=C \\ (8)*x^3+Ax^2+C=Bx \\ (9)\ x^3+Bx+C=Ax^2 \\ (10)x^3=Ax^2+Bx+C \end{cases}$$

سه صنف که درآنها دو مرتبه معادل دومرتبهٔ دیگر است :

---

(۱) این سه صنف که ظاهراً از معادلات درجهٔ سوم بشمار میروند درحقیقت از درجهٔ دوم‌اند زیرا میتوان در تمام آنها از x عامل مشترك گرفت و در اینصورت معادلات مزبور شبیه بمعادلات سه‌گانه درجهٔ دوم که قبل‌ازآنها ذکرشد میگردند و خیام نیز به این مطلب اشاره کرده و بطریق هندسی ثابت میکند که مثلا معادلهٔ $x^3+ax^2=bx$ با معادلهٔ $x^2+ax=b$ معادل است .

$$\begin{cases} (۱۱)\ \ x^۳ + Ax^۲ = Bx + C \\ (۱۲)\ \ x^۳ + Bx = Ax^۲ + C \\ (۱۳)\ \ x^۳ + C = Ax^۲ + Bx \end{cases}$$

بامختصر دقتی معلوم میشود که معادلات بالاشامل تمام اشکال معادلات ناقص وکامل درجهٔ دوم وسوم میباشد ؛ وچون بحث ما راجع بمعادلات درجهٔ سوم است، گوئیم این قبیل معادلات را امروزه بصورت کلی .

$$ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$$

نمایش میدهند که هرگاه تمام جمل درآن موجود باشد معادله را کامل گویند ، واگر یك یا چند جمله وجود نداشته باشد معادله ناقص بوده وبیکی از اشکال زیر نشان داده میشود :

$$(۱)\quad ax^۳ + bx^۲ + cx = ۰$$

$$(۲)\quad ax^۳ + bx^۲ + d = ۰$$

$$(۳)\quad ax^۳ + cx + d = ۰$$

$$(٤)\quad ax^۳ + d = ۰$$

در معادلهٔ (۱) اگر یکی از ضرایب $x^۲$ و x یا هردومنفی باشد ، معادلهٔ مزبور بسه صورت درمیآید که خیام آنها را در سه صنف بین x و$x^۲$و$x^۳$ شرح داده است (و در این سه صنف و همچنین در اصناف دیگر تمام جمل برضریب $x^۳$ تقسیم شده که ضریب مزبور واحد باشد) ؛ ودرمعادلهٔ (۲) نیز اگر یك یا دوضریب منفی باشد معادله باز بسه صورت درخواهدآمد که خیام آنهارا ضمن سه صنف بین‌عدد و $x^۲$و$x^۳$ بیان داشته است ؛ ودرمعادلهٔ (۳) نیز اگر یك یادوضریب منفی باشد معادله بسه صورت در میآید که خیام آنهارا درسه صنف بین عدد و x و $x^۳$ درآورده است ؛ وبالاخره معادلهٔ (٤) را خیام ضمن معادلات دوجمله‌ای یا مفردات بصورت $x^۳ = a$ نمایش داده است ؛ وچون همانطور که گفتیم قدما تمام جمل معادله را برضریب $x^۳$ تقسیم میکردند که ضریب مزبور مساوی واحدباشد ،

بنابراین‌معادلهٔ $x^{3}=a$ که خیام‌جزءِ مفرداتذکر کرده درحقیقت بمنزلهٔ‌معادلهٔ ناقص درجهٔ سوم $ax^{3}+d=0$ میباشد.

اما در معادلهٔ کامل $ax^{3}+bx^{2}+cx+d=0$ پس از تقسیم تمام جمل بر ضریب x^{3} معادله بصورتی در میآید کــه در آن ، ضریب x^{3} مساوی واحد است ؛ پس‌ازاین عمل برحسب اینکه ضرایب x^{2} و x وجملهٔ معلوم d مثبت یامنفی‌باشند، معادلهٔ مزبور به هفت صورت ممکن است درآید و خیام این اشکال هفت‌گانه را درضمن مقترنات چهارجمله‌ای که دربالا شرح دادیم نشان داده است ؛ مثلا اگر در معادلهٔ کامل درجهٔ سوم جملهٔ معلوم منفی باشد ، واین جملهٔ منفی را بآنطرف معادله نقل کنیم ، معادله بصورتی در خواهد آمد که خیام آنرا در اولین ردیف مقترنات چهار جمله‌ای یعنی :

$$(7) \quad x^{3}+Ax^{2}+Bx=C$$

نمایش داده است ؛ وهکذا سایراصناف.

ونیز اگــر ضرایب x^{2} و x منفی بــاشد معادلهٔ کامل درجهٔ سوم پس از نقل جملی که شامل x^{2} و x است بسمت دیگر بصورتی درخواهدآمد که خیام آنرا در ردیف (۱۳) یعنی $x^{3}+C=Ax^{2}+Bx$ نمایش داده است .

لازم بتذکر است کــه ریاضیون قدیم ایران چون از راه براهین هندسی بحل معادلات جبری میپرداخته‌اند ، لذا ناچار بوده‌اند که برای هریك از اشکال مختلفهٔ آن ، شخصیت و استقلالی قائل گردیده وهر کدام را جداگانه با استدلال هندسی حل نمایند ، زیرا در استدلال هندسی نمیتوان اصناف مختلفهٔ معــادلات درجهٔ سوم‌رابصورت‌کلی $ax^{3}+bx^{2}+cx+d=0$ تعمیم داده بحل‌آن‌پرداخت.

خلاصه اینکه خیام رویهم رفته معادلات درجهٔ سوم را اعم از اینکه کامل یا ناقص باشند به چهارده شکل که سیزده تای آن در بالا بوسیلهٔ شماره مشخص شده وچهاردهمی بصورت $x^{3}=a$ در ردیف مفردات منظور گردیده درآورده و ازاین ۱٤ شکل فقط دوشکل که عبارت از :

$$x^3 + C = Ax^2$$

و

$$x^3 + Ax^2 + C = Bx$$

باشد قبل از خیام حل وبحث شده وحل بقیه از اکتشافات خیام است .

دراینجا باید تذکر دهیم که حل معادلات درجهٔ سوم ازراه برهان‌هندسی آنطور که خیام کشف کـرده بسیار آسانتر از حل معادلات مزبور از راه جبر و مقابله است که امروز بآن عمل میکنند ؛ جز اینکـه راه هندسی برای رسیدن بجواب صحیح دقت زیاد در ترسیم اشکال لازم دارد ، زیرا جواب یـا جوابهای معادله از اندازه گیریهای دقیق در تقاطع مقاطع مخروطی بدست میآید .

چون دربین مقاطع مخروطی ، سهمی وهذلولی نقش بیشتری درحل‌معادلات درجهٔ سوم دارند لذا برای تذکر ابتدا تعریف مقاطع مخروطی و سپس خواص کلی وفرمول اصلی سهمی وهذلولی‌را بیان میداریم .

البته آقایان استادان و دبیران ریاضی مباحث مربوط بمقاطع مخروطی را میدانند وبنابراین‌ممکن است مطالبی که ذکر خواهدشد بنظرآنها بیفایده‌جلوه کند ولی کسانی مانند اطبا ومهندسین ولیسانسیه درعلوم مختلف ونیزدانشمندانی کـه اطلاعات عمومی در کلیهٔ علوم دارند ومعلومات‌آنها درباره مقاطع مخروطی دقیق نیست . بـرای فهم براهین هندسی کـه خیام جهت حل معادلات درجهٔ سوم بکار برده است باید حتماً خواص مقاطع مخروطی وفرمولهای مربوطه را مطالعه نموده و نیز مقدمه ای را کـه خیام قبل از شروع بحل معادلات درجهٔ سوم بیـان داشته است با دقت بخوانند تا بگفته‌های خیام که خیلی مختصرو کوتاه وخالی از حشو و زوائد میباشد بخوبی پی‌ببرند ؛ بنابراین توجه دقیق‌خوانندگان‌را بمطالب آتی جلب میکنیم :

بطوریکه در کتب کلاسیك شرح داده‌اند تعریف مقاطع مخروطی و طرز بدست‌آمدن آنها بقرار زیر است :

هر گاه صفحه‌ای مخروط دواری [۱] را قطع کند چهار حالت ممکن است اتفاق بیفتد :

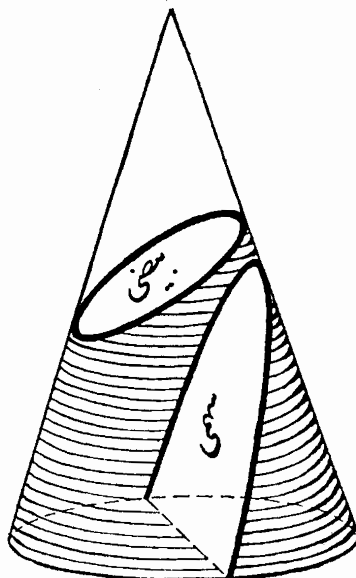
۱ـ صفحهٔ مزبور برمحور عمود باشد ، دراین صورت مقطع دایره است .

۲ـ صفحه برمحور عمود نباشد اما تمام مولد هارا دریـك طرف رأس قطع کند ؛ دراینصورت مقطع شکلی‌است که آنرا بیضی گویند : (Ellipse).

۳ـ صفحه با یکی از مولد های مخروط موازی باشد ؛ در اینصورت مقطع منحنی غیر مسدودی است که سهمی (Parabole) خوانده میشود .

٤ـ صفحهٔ مزبور برخی از مولد ها را در یك طرف رأس و برخی دیگر را درطرف دیگرآن تلاقی میکند (یعنی هردو دامنهٔ مخروط را قطع مینماید) مقطع منحنی ایست مرکب از دوشاخهٔ متمایز وهذلولی (Hyperbole) نام‌دارد .

پس دایره ، بیضی ، سهمی وهذلولی ، همه ، فصل مشترکهای مخروط دوار بایك صفحه اند . ازاین روی‌آنهارا مقاطع مخروطی مینامند (ش۱۰) .

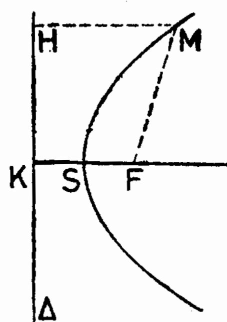


(ش۱۰)

(۱) هرگاه درمخروط عمودی که از رأس برقاعده فرود میآید برمرکز قاعده بگذردمخروط را دوار گویند .

این تعریف ها ونیز خواص مقاطع مخروطی و فرمولهای آنهارا همانطور که امروز در کتابها موجوداست قدماشرح داده‌اندوفقط بعضی‌ازاصطلاحات تغییر پیدا کرده که اینك برای روشن شدن ذهن خوانندگان اصطلاحاتی را که در کتاب جبر ومقابلهٔ خیام بکار رفته با معادل کنونی‌آنها دراینجا ذکرمیکنیم.

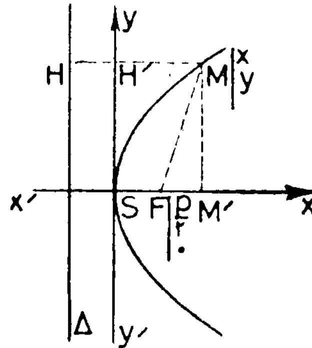
۱ - سهمی - سهمی مکان هندسی نقاطی‌است که از یکنقطهٔ ثابت ویك خط ثابت بیك فاصله باشند. نقطهٔ ثابت راکانون ، خط ثابت را هادی ، فاصلهٔ کانون از هادی را ممیز یا پارامتر گویند وآنرا به p نمایش میدهند . دوبرابر فاصلهٔ کانون از هادی یا ۲p را که در فرمول سهمی داخل است خیام ضلع قائم نامیده پس : ضلع قائم = ۲p .



(ش۱۱)

اگر M نقطه‌ای‌ازسهمی باشد MF = MH است ؛ M F **شعاع حامل** نقطهٔ M نامیده میشود (ش۱۱) و خیام آنرا **خط ترتیب** نام گذاشته .

S وسط عمود FK ، که ازکانون برهادی رسم‌شده است ، یکنقطه ازسهمی ورأس سهمی است .



(ش۱۲)

سهمی صفحه را بدو جزء تقسیم میکند ، جزئی که شامل F کانون منحنی است ، آنرا **ناحیهٔ داخل سهمی** گویند ، وجزئی که شامل خط Δ ، هادی‌منحنی است و آنرا **ناحیهٔ خارج سهمی** نامند . خیام قسمتی از **محور کانونی** را که در گودی Concavité منحنی قرار دارد **سهم** نامیده است .

معادلهٔ سهمی ـ هرگاه محور سهمی را محور x ها وعمودی‌راکه از رأس سهمی برآن رسم شود محور y ها اختیار کنیم (ش۱۲) x نقطهٔ F مساوی $\frac{p}{۲}$ و y آن صفر است ، اگرمختصات نقطهٔ غیرمشخص M ازسهمی را x و y فرض کنیم چنین خواهیم داشت :

$$MF^{۲} = y^{۲} + \left(x - \frac{p}{۲}\right)^{۲}$$

و

$$MH = x + \frac{p}{۲}$$

امّا

$$MF^{۲} = MH^{۲}$$

یا

$$y^{۲} + x^{۲} + \frac{p^{۲}}{٤} - px = x^{۲} + \frac{p^{۲}}{٤} + px$$

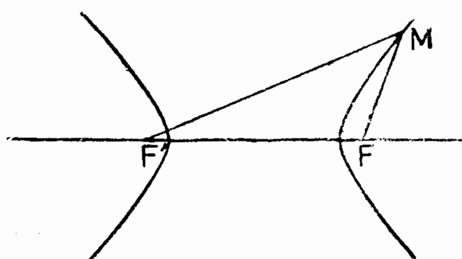
و پس‌از ساده کردن :

$$y^{2} = 2px$$

چنانکه بعداً خواهیم دید خیام فرمول $y^2 = 2px$ را برای حل معادلات درجهٔ سوم بکار برده است .

۲ـهذلولی ـ هذلولی مکان هندسی نقاطی است واقع در یك صفحه که تفاضل فواصلشان ازدونقطهٔ ثابت مانند F و 'F مقدار ثابت $2a$ [۱] باشد . (ش۱۳) دونقطهٔ ثابت‌را دوکانون و $2a$ را عدد ثابت هذلولی گویند . فاصلهٔ بین دوکانون‌را فاصلهٔ‌کانونی هذلولی مینامند و به $2c$ نمایش میدهند از مثلث MF'F که در آن هرضلع بزرگتر است از تفاضل دوضلع دیگر واضح میشود که $2a < 2c$

ویا $a < c$ است .



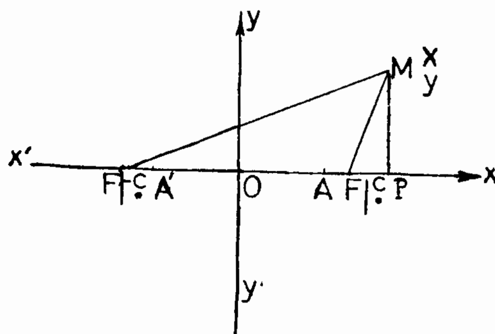
(ش۹-۱)

(ش۱۳)

'MF و M F را شعاع های حامل نقطهٔ M میگویند . واضح است که این دوشعاع حامل میتوانند هرمقداری را احراز کنند پس برروی هذلولی نقاطی میتوان یافت که بسیار دور باشند .

(۱) مقدار ثابت $2a$ را که درکتابهای امروزه بنام **طول قطر قاطع** مینامند خیام **ضلع مایل** نامیده است .

محاسبهٔ شعاع‌های حامل درهذلولی - محور قـاطـع را محور طولها و محور غیرقاطع را محور عرض‌ها ونقطهٔ مرکز هذلولی را مرکز مختصات اختیار میکنیم ومختصات هرنقطهٔ M از هذلولی را x و y مینامیم (ش۱٤) .



(ش۱٤)

ازمحاسبه‌ای نظیر آنچه درمحاسبهٔ شعاع‌های حامل دربیضی بیان شده است (بکتاب مخروطات مراجعه شود) طول شعاع های حامل نقطهٔ M چنین بـدست میآید :

$$MF = a - \frac{cx}{a}$$

و

$$MF' = a + \frac{cx}{a}$$

معادلهٔ هذلولی- هرگـاه محور هـای مختصات را مطابق (ش ۱٤) بر محورهای هذلولی منطبق اختیار کنیم و از M عمود MP را بر x'x فرود آوریم در مثلث قائم الزاویه MPF' چنین خواهیم داشت :

$$MF'^2 = MP^2 + F'P^2$$

وچون

$$MF' = a + \frac{cx}{a}$$

و $$F'P = x + c$$

و $$PM = y$$

پس :

$$\left(a+\frac{cx}{a}\right)^{2}=y^{2}+(x+c)^{2}$$

پس‌از بقوه رسانیدن وحذف جملهٔ $2cx$ ازدوطرف :

$$a^{2}+\frac{c^{2}x^{2}}{a^{2}}=y^{2}+x^{2}+c^{2}$$

یا :

$$x^{2}\left(\frac{c^{2}-a^{2}}{a^{2}}\right)-y^{2}=c^{2}-a^{2}$$

یعنی :

$$\frac{b^{2}x^{2}}{a^{2}}-y^{2}=b^{2}$$

وپس‌از تقسیم بر b^{2} :

$$\boxed{\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1}$$

خیام از این فرمول نیز برای حل معادلات درجهٔ سوم استفاده کرده است.

***

خیام قبل از شروع بحل وبحث معادلات درجهٔ سوم سه مقدمه ذکر میکند که ما نیز برای روشن شدن ذهن خوانندگان بنقل آنها میپردازیم ؛ زیرا حل معادلات درجهٔ سوم محتاج بدانستن این سه مقدمه است :

مقدمهٔ ۱ ـ میخواهیم دوخط بین دوخط مفروض چنان بیابیم که از آنها تناسب متصلی تشکیل شود ، یعنی اگر دوخط ا ب و ب ج که بترتیب مساوی a و b هستند مفروض باشند میخواهیم دوخط مانند x و y چنان بیابیم که :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$ باشد

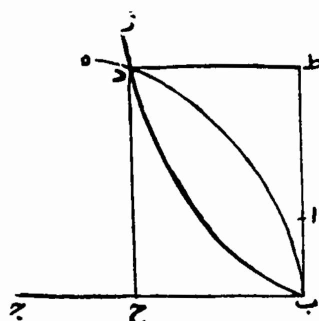
برای انجام این امر فرض میکنیم (ا ب) و (ب ج) دوخط مفروض باشند. دوسهمی برأس (ب) که سهم [۱] وضلع قائم [۲] اولی (ب ج) وسهم و ضلع قائم دیگری (ا ب) باشد طرح میکنیم . دو منحنی ناچار یکدیگر را در نقطه ای مانند (د) قطع میکنند . حال گوئیم خطوط (ا ب) و (ب ح) و (ب ط) و (ب ج) تناسب متصلی تشکیل میدهند زیـرا بموجب خاصیت سهمی و تساوی قطعاتی که در (ش ۱۵) می‌بینیم :

ح د۲ = ب ح × ب ج *

پس ب ج / ب ط = ب ط / ح ب

و د ط۲ = ب ا × ب ط **

پس ب ط / ح ب = ح ب / ب ا



(ش ۱۵)

---

(۱) مقصود از سهم قسمتی از محور سهمی است که در گودی واقع شده. (۲) ضلع قائم یعنی $2p$

* درسهمی (ب ه) طبق خواص سهمی میدانیم که y = ح د۲ و x = ب ح و $2p$ = ب ج

** درسهمی (ب ز) نیز میدانیم که y = د ط۲ و x = ب ط و $2p$ = ب ا

و ازآنجا :

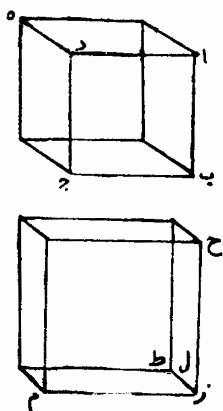
$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ب ط}} = \frac{\text{ب ط}}{\text{ح ب}} = \frac{\text{ح ب}}{\text{ا ب}}$$

یا :

$$\frac{\text{ب ط}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ح ب}}{\text{ب ط}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ح ب}}$$

و باینطریق می‌بینیم که بین‌دوخط (ا ب) و (ب ج) تناسب متصلی باواسطهٔ دوخط (ح ب) و (ب ط) تشکیل شده است .

مقدمهٔ ۲ ـ میخواهیم مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع مفروض (ح م) است معادل بـا مکعب مستطیل (ه ب) کـه قاعدهٔ آن مربع (ا ج) است طرح کنیم (ش ١٦) .



(شکل١٦)

خطوط $\overline{\text{ك}}$ و $\overline{\text{ل}}$ را چنان تعیین میکنیم که :

$$\frac{\text{ز م}}{\text{ك}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ز م}} \quad (١)$$

و $$\frac{\text{ل}}{\text{د ه}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ك}} \quad (٢)$$ باشند

و (ز ط) را مساوی $\overline{ل}$ عمود برصفحهٔ (ح م) قرار داده جسم (ح ط م) را تمام میکنیم و گوئیم این جسم معادل جسم (ه ب) است زیرا :

از رابطهٔ (۱) یعنی $\frac{ز م}{ك} = \frac{ا ب}{ز م}$ چنین حاصل میشود :

$$ك \times ا ب = ز م^۲$$

طرفین را بر $ا ب^۲$ تقسیم میکنیم چنین حاصل میشود :

$$\frac{ك \times ا ب}{ا ب^۲} = \frac{ز م^۲}{ا ب^۲}$$

یا $\frac{ك}{ا ب} = \frac{ز م^۲}{ا ب^۲}$

یا $\frac{ا ب}{ك} = \frac{ا ب^۲}{ز م^۲}$

وچون طبق رابطهٔ (۲) :

$$\frac{ل}{ده} = \frac{ا ب}{ك}$$

پس :

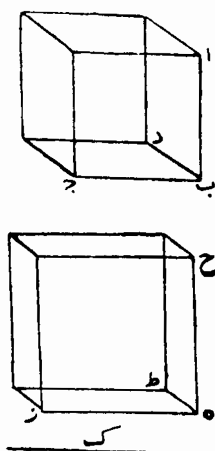
$$\frac{ل}{ده} = \frac{ا ب^۲}{ز م^۲}$$

وچون نسبت قواعد دوجسم مثل عکس نسبت ارتفاعات آنها استحکم ثابت میباشد .(۱)

مقدمهٔ ۳ ـ مجسّمی که قاعده‌اش مربع وارتفاعش طول مفروض (ه ط)باشد چنان طرح کنید که حجمش با حجم مجسّم (ا د ج) که قاعده اش مربع (ا ج) است مساوی باشد (ش۱۷) .

---

(۱) خیام بجای مکعب مستطیل مجسم استعمال میکند وبعداً تذکر میدهد که مقصود او از مجسم سطحی است که وجوه آن متوازی و زوایایش قائمه باشند و مرادش از سطح سطحی است که اضلاعش متوازی وزوایایش قائمه باشند .



(ش ۱۷)

طولهای (ك) و (ل) را چنین تعیین میکنیم که :

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ك}} = \frac{\text{ه ط}}{\text{ب د}} \qquad (۱)$$

و

$$\frac{\text{ل}}{\text{ك}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ل}} \qquad (۲) \quad \text{باشد}$$

بعد (ه ز) را مساول (ل) بر (ه ط) عمود کرده (ط ز) را تمام میکنیم و (ه ح) را بطول (ل) برصفحهٔ (ط ز) عمود مینمائیم و جسم (ح ط ز) را تمام میکنیم ، این جسم همان جسم مطلوبست زیرا :

از رابطهٔ (۲) یعنی :

$$\frac{\text{ل}}{\text{ك}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ل}}$$

چنین بدست میآید :

$$\text{ا ب} \times \text{ك} = \text{ل}^{۲}$$

و

$$\frac{\text{اب} \times \text{ك}}{\text{ا ب}^{۲}} = \frac{\text{ل}^{۲}}{\text{اب}^{۲}}$$

یا $$\frac{\text{اب}^{2}}{\text{اب} \times \text{ك}} = \frac{\text{اب}^{2}}{\text{ل}^{2}}$$

یا $$\frac{\text{اب}}{\text{ك}} = \frac{\text{اب}^{2}}{\text{ل}^{2}}$$

وپس‌از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر با رابطهٔ (۱) چنین خواهیم داشت :

$$\frac{\text{۰ط}}{\text{بد}} = \frac{\text{اب}^{2}}{\text{ل}^{2}}$$

ولهذا بهمان دلیلی که درمقدمهٔ قبل گفتیم دوجسم معادل‌اند .

***

حل معادلات درجهٔ سوم

بطریقی که خیام در کتاب جبر و مقابله خود شرح داده است

باید دانست که خیام همیشه معادلات را ازدو نقطه نظر مورد حل وبحث قرار میداده است : یکی موقعیکه مجهول برای اعداد در نظر گرفته میشود و دیگر درصورتیکه مجهول مقدار هندسی (طول ـ سطح ـ حجم) فرض میشده است ؛ ومعادلات درجهٔ اول و دوم را اعم از اینکه مجهول عدد یا مقادیر هندسی بوده حل میکرده ، ولی در معادلات درجهٔ سوم فقط ببرهان هندسی اکتفا نموده و بکمك مقاطع مخروطی اصناف مختلفهٔ این معادلات را حل میکرده است ؛ با اینحال حل عددی را نیز در معادلات درجه سوم لازم میدانسته ، چنانکه خود او گوید : « وباید دانست که برهان هندسی طرق حل این معادلات جای برهان عددی آنها را در موقعیکه موضوع مسئله عدد مطلق باشد ، نه مقدار هندسی ، نمیگیرد و شاهد بر این مطلب اینست که اقلیدس قضایائی را که در مقالهٔ پنجم کتاب خود درباب نسبت مقادیر هندسی ثابت کرده در مقالهٔ هفتم مجدداً آنها را برای اعداد مطلقه ثابت نموده است . »

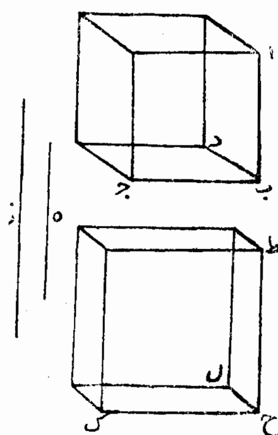
ویکه ریاضی دان فرانسوی نیز دربارهٔ کتاب جبر ومقابلهٔ خیام میگوید:
« از خصوصیات قابل بحث و توجه این کتاب آنست که مصنف الحاق حل هندسی هریك از معادلاتی را که مورد مطالعه قرار داده بحل عددی آن لازم و در حکم قانونی میداند . »

برای اینکه با مثال ساده ای حل معادلات جبری با این دو طریقه معلوم گردد ، بحل معادلهٔ ناقص درجهٔ سوم $x^3 - d = 0$ که درآن ضرایب x^2 و x صفر است ، ویکی از ساده ترین اشکال معادلات درجه سوم میباشد میپردازیم :

خیام معادلهٔ مزبور را به هردوشکل عددی و هندسی حل کرده است .

۱ ـ حل عددی ـ برای حل معادلهٔ $x^3 - d = 0$ یا $x^3 = d$ میگوید اگر موضوع مسئله عدد باشد x^3 معلوم خواهد بود و استخراج کعب آن راهی جز تفحص جدول مکعبات ندارد، چه دانستن اینکه کعب ۱۲۵ برابر ۵ است از روی یك قانون ریاضی نیست ، بلکه مبنی بر تفحص میباشد .

۲ـ حل هندسی ـ خیام میگوید بـرای حل $x^3 = d$ از راه هندسی ، مکعب مستطیل (ا د ب) راکه قاعده‌اش (ا ج) مربعی بضلع واحد ، و ارتفاعش (ب د) مساوی عدد مفروض یعنی d است [۱] طرح میکنیم .



(ش ۱۸)

حجم این جسم برابر d خواهد بود . حـال مکعبی معادل این جسم می سازیم . برای انجام این امر دو خط مانند (ه) و (ز) بطوری تعیین میکنیم که با (ا ب) و (ب د) تناسب متصلی تشکیل دهند . مکعب (ط ل ك) که ضلعش

---

۱ ـ درکتاب جبرومقابلهٔ خیام هرجا میگوید عددی مساوی مجسمی است مرادش از عدد ، مکعب مستطیلی است که قاعده اش مربعی بضلع واحد وارتفاعش برابر عدد مفروض‌میباشد.

مساوی (ه) و درنتیجه معلوم است معادل‌جسم‌مذکور است، زیرا بموجب تناسب متصلی که گفتیم :

$$\frac{\text{اب}}{\text{ز}} = \frac{\text{مربع اج}}{\text{مربع طك}}$$

و آن برابر $\frac{\text{حك}}{\text{ب د}}$ یا $\frac{\text{ح ل}}{\text{ب د}}$ میباشد[1] یعنی :

$$\frac{\text{ح ل}}{\text{ب د}} = \frac{\text{مربع اج}}{\text{مربع طك}}$$

یا ح ل × مربع ط ك = ب د × مربع ا ج پس دو جسم معادل اند .

تبصره ـ خیام پس‌از حل معادلهٔ $x^3 = d$ با دو طریق عددی و هندسی ، شروع بحل اصناف مختلفهٔ معادلات درجهٔ سوم ، سه‌جمله‌ای وچهارجمله‌ای کرده و طریقهٔ حل آنهارا با برهان هندسی بیان میدارد ؛ ولی قبل از انجام این امر ابتدا معادله را متجانس میکند باین قسم :

۱ـ ضریب جملهٔ درجهٔ دوم (A) را بوسیلهٔ طولی (a) نمایش میدهد ؛

۲ـ ضریب جملهٔ درجهٔ اول (B) را بوسیلهٔ مربعی (b^2) مینماید ؛

۳ـ جملهٔ معلوم را (در معادلهٔ $x^3 = d$ بوسیلهٔ مکعب مستطیلی بقاعدهٔ مربع واحدوارتفاع d نمایش‌داده که شرح آن گذشت)درمعادلات $x^3 + Ax^2 = C$ و $x^3 + C = Ax^2$ به مکعبی بضلع c و در معادلهٔ $x^3 = Ax^2 + C$ بوسیلهٔ مکعب مستطیلی کـه ارتفاعش a و قاعده‌اش مربع باشد $(C = ac^2)$ و بالاخره در باقی معادلات بمکعب مستطیلی کـه قاعده اش مـربـع b^2 باشد $(C = b^2c)$ نمایش میدهد .

---

۱ ـ برای روشن شدن مطلب بمقدمه سوم صفحه۸۷مراجعه شود.

پس از اینکه معادله متجانس شد قطوع لازم برای حل هرمعادله را ازروی ضرایب معادله تعیین کرده از تقاطع آنها جواب یا جوابهای معادله را بدست میآورد ، که اگر بعضی از این راههای حل را دقیقاً مورد بررسی قرار دادهٔ و مشکلات و اهمیت آنرا بادیدهٔ انصاف بنگریم به هوش سرشار و نبوغ و تصور خلاقهٔ خیام برای کشف مطالبی که قبل‌ازاو وجود نداشته است پی‌برده وبی‌اختیار آن دانشمند بزرگ را مورد تکریم و تحسین قرار خواهیم داد.

واینك بحل معادلات درجهٔ سوم ، سه جمله‌ای وچهار جمله‌ای بطریق خیام میپردازیم :

***

حل معادلات درجهٔ سوم سه جمله ای

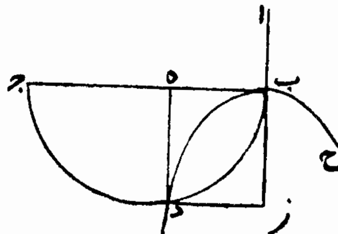
۱ ـ معادلهٔ $x^3 + Bx = C$

یا $x^3 + b^2x = b^2c$

فرض میکنیم اب $= b$ و بج $= c$ باشد

قطوع لازم برای حل : نیمدایره ای بقطر (بج) ، سهمی برأس (ب) وسهم (بز) وضلع قائم (ا ب) .

جواب : ب ه $= x$



(ش ۱۹)

برهان ـ د ز ^۲^ = ب ز × ب ا

پس $\frac{\text{دز}}{\text{بز}} = \frac{\text{اب}}{\text{دز}}$

یا $\frac{\text{به}}{\text{هد}} = \frac{\text{اب}}{\text{به}}$

اما در دایره : $\frac{\text{ده}}{\text{هج}} = \frac{\text{به}}{\text{ده}}$

و لهذا $\frac{\text{ده}}{\text{هج}} = \frac{\text{به}}{\text{هد}} = \frac{\text{اب}}{\text{به}}$

بنا بر این جسم (۲ اب × ه ج) با مکعب (۳ ب ه) معادل استو اگر جسم (۲ اب × ب ه) را به هر دو بیفزائیم دیده میشود که جسم (۲ اب × ب ج) معادل مجموع مکعب (۳ ب ه) وجسم (۲ اب × به) است [۱]

چنانکه می بینیم این صنف بیش از یك شکل ندارد و تمام مسائل آن ممکن است [۲] و از تقاطع دایره وسهمی حل میشود .

***

۲ - معادلهٔ $x^{3} + C = Bx$

یا $x^{3} + b^{2}c = b^{2}x$

فرض میکنیم : اب$= b$ و بج$= c$ باشد

قطوع : سهمی برأس (ب) وضلع قائم (اب) وسهم امتداد (اب) ؛
هذلولی برأس (ج) وسهم امتداد (بج) وضلع قائم و ضلع مایل مساوی (بج) .

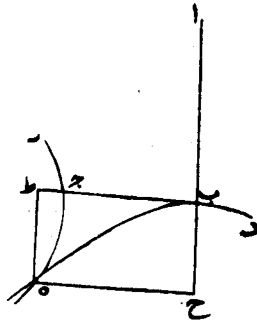
این دو منحنی یا متلاقی اند یا نه . در حالت دوم مسئله ممتنع است و در حالت اول در یك نقطه بر هم مماس ویا در دو نقطه مشترك‌اند . فرض کنیم (ه) یکی از نقاط مشترك آندو باشد . (ش۲۰)

جواب : ب ط $= x$

---

(۱) یعنی : $\text{به}^{3} + (b^{2} \times \text{به}) = b^{2}c$

۲- معادلهٔ مفروض فقط یك جواب مثبت دارد ودوریشهٔ دیگرش موهومی‌هستند ؛



(ش ۲۰)

برهان - در هذلولی نسبت مربع (ه ط) به مسطح (ب ط) و (ط ج) مثل نسبت اضلاع قائم ومایل است[۱] پس در اینجا :

ه ط ۲ = ب ط × ط ج

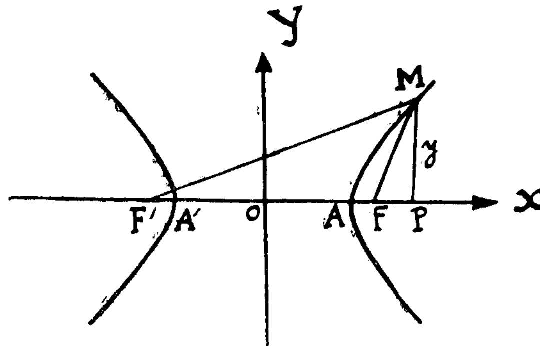
۱- اگر M نقطه ای از هذلولی باشد :

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

یا : $$\frac{y^۲}{x^۲-a^۲}=\frac{b^۲}{a^۲}$$

یا $$\frac{y^۲}{(x+a)(x-a)}=\frac{۲b^۲}{a}\times\frac{۱}{۲a}$$

و بالاخره : $$\frac{PM^۲}{AP\times A'P}=\frac{۲p}{۲a}$$ (ش۲۱)



(ش ۲۱)

ولذا : $\frac{طه}{طج} = \frac{بط}{ط ه}$

اما در سهمی : $ه ح^{2} = ب ط^{2} = ب ح \times ب ا$

پس : $\frac{بح}{طج} = \frac{بط}{ب ح} = \frac{اب}{بط}$

ولهذا ؛ $\frac{بط}{طج} = \frac{اب^{2}}{بط^{2}}$

پس جسم($ا ب^{2} \times ط ج$) معادل مکعب($ب ط^{3}$) است وچون جسم ($ا ب^{2} \times ب ج$) را بهردو بیفزائیم حکم ثابت میشود . پس ثابت شد که این صنف اشکال مختلفی دارد و بعضی از مسائل آن ممتنع است [1] و بتقاطع سهمی وهذلولی حل میشود .

***

۳-: $x^{3} = Bx + C$

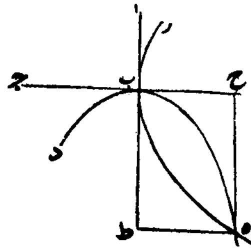
یا : $x^{3} = b^{2}x + b^{2}c$

فرض میکنیم اب = b و بج = c باشد

قطوع : سهمی برأس (ب) و سهم امتداد (اب) و ضلع قائم (ا ب) - هذلولی برأس (ب) وسهم امتداد (بج) و اضلاع قائم و مایل مساوی (بج) ؛ منحنی اول بر خط (ب ح) ومنحنی دوم بر (ا ب) مماس است ، پس دو منحنی ناچاریکدیگررادرنقطه‌ای‌مثل (ه) قطع‌میکنند و (ب ح) = x میباشد .(ش۲۲)

برهان - برهانی که خیام در این حالت ایراد میکند مانند آنست که در حالت قبل ذکر شد ولهذا احتیاجی بذکر وتکرار آن نیست . در پایان‌مسئله مینویسد : پس ثابت شد که این صنف بیش از یك شکل ندارد و تمام مسائل آن

۱ - معادلهٔ مفروض ، همیشه یك جواب منفی دارد و دو ریشهٔ دیگر آن یا موهومی یا مثبت و مساوی و یا مثبت و غیر مساویند . خیام با برهان هندسی فقط یکریشهٔ مثبت را پیدا کرده وبه ممتنع نیز که همان موهومی باشد اشاره نموده است .



(ش ۲۲)

ممکن اند [۱] وبتقاطع سهمی وهذلولی حل میشوند .

***

$$x^{3} + Ax^{2} = C$$ ـ ٤

یا $$x^{3} + ax^{2} = c^{3}$$

خط (اب) را مساوی a (ضریب x^{2}) رسم نموده مکعبی بضلع ح = c طرح میکنیم باینطریق که خط (اب) را امتداد داده و خط (بط) را باندازه (ح) جدا نموده ومربع (ب ط د ج) را رسم میکنیم : سپس بر نقطه د هذلولی (ه د ن) را بادو مجانب (ب ج) و (ب ط) طرح مینمائیم ؛ ونیزسهمی (ا ك) را برأس (ا) و سهم (ا ط) و ضلع قائم (ب ج) رسم میکنیم . این دو منحنی ناچار یکدیگر را در نقطهٔ (ه) قطع میکنند . از این نقطه عمود (ه ز) را بر (ب ط) وعمود (ه ل) را بر (ب ج) وارد میکنیم .

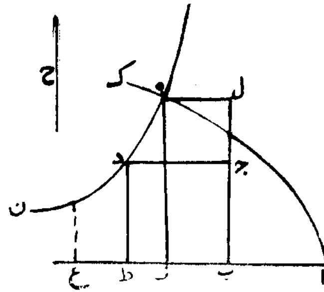
امتداد و طول این‌عمودهامعلوم میباشد ، و گوئیم (ب ز) = x است . (ش۲۳)

برهان ـ اولا ممکن نیست نقطهٔ (ز) بر (ط) یا در خارج (ا ط) واقع شود ، زیرا : اگر بر (ط) قرار گیرد :

ا ط . ب ج = ا ط . طب = ه ز ۲

---

۱ ـ معادلهٔ مفروض ، همیشه یکریشهٔ مثبت دارد و دو ریشهٔ دیگرش منفی یا موهومی هستند .



(ش ۲۳)

یا ط ب . ا ط = ط د^{۲}

اما ط ب. ط ب = ط د^{۲}

و این محال است ، پس (ز) بر (ط) واقع نمیشود .

و اگر (ز) در خارج (اط) باشد (هز) کوچکتر از (طد) خواهد بود و بطریق اولی محال لازم میآید پس (ز) بین (ا) و (ط) واقع است و :

ب ج . ا ز = ه ز^{۲}

پس : $\frac{\text{از}}{\text{هز}} = \frac{\text{هز}}{\text{بج}}$

اما بموجب خاصیت هذلولی ، مستطیل (ه ب) با مربع (دب) معادل است ، پس :

$$\frac{\text{بج}}{\text{بز}} = \frac{\text{هز}}{\text{بج}}$$

ولذا خطوط (ا ز) و(هز) و (بج) و(بز) تناسب متصلی تشکیل میدهند و بالنتیجه $\frac{\text{بج}}{\text{از}} = \frac{\text{بز}^{۲}}{\text{بج}^{۲}}$ پس جسم (ب ز^{۲} . ا ز) معادل مکعب (ب ج^{۳}) است ؛ اما جسم مذکور معادل مجموع دوجسم (بز^{۳}) و (ب ز^{۲}. ا ب)است؛ پس مکعب (ب ج^{۳}) معادل مجموع این دوجسم میباشد فهوالمطلوب .

این صنف بیش از یك شکل ندارد و تمام مسائل آن ممکن است [۱] و بکمك هذلولی وسهمی حل میشود.

***

۵ - $x^3 + C = Ax^2$

یا $x^3 + c^3 = ax^2$

ضریب x^2 یعنی a را مساوی (اج) فرض کرده و مکعبی بضلع (ح) برابر عدد معلوم طرح میکنیم .

سه حالت ممکن است اتفاق افتد: خط c = ح مساوی خط اول (یعنی اج $= a$) یا کوچکتر و یا بزرگتر از آنست .

در حالت اول یعنی اگر $c = a$ باشد مسئله ممتنع است زیرا در اینصورت یا $x = c$ یا $x < c$ و یا $x > c$ است . اگر $x = c$ باشد $ax^2 = c^3$ خواهد بود و این ممکن نیست زیرا طبق معادلهٔ $x^3 + c^3 = ax^2$ باید x^3 بر c^3 افزوده شود تا حاصل مساوی ax^2 گردد؛ و اگر $x < c$ باشد $ax^2 < c$ و بطریق اولی $ax^2 < x^3 + c^3$ میشود ؛ و بالاخره اگر $x > c$ فرض شود $x^3 > ax^2$ میشود و بطریق اولی $x^3 + c^3 > ax^2$ خواهد بود .

درحالت دوم یعنی اگر $c > a$ باشد محالات مذکوره بطریق اولی لازم میآید ، پس واجبست که $c < a$ باشد والا مسئله ممتنع است . در این حال (بج) را مساوی c جدا میکنیم این خط مساوی (اب) یا بزرگتر و یا بالاخره کوچکتر از آنست . درهرحال مربّع (ج د) را تمام میکنیم .

قطوع لازمه :

۱ ـ هذلولی مار بر (د) با مجانب های (اج) و (جه)

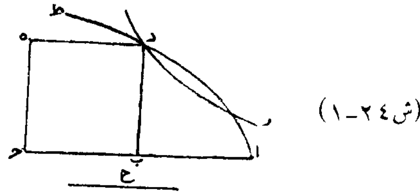
---

۱ ـ معادلهٔ مفروض فقط یکریشهٔ مثبت دارد ودو ریشهٔ دیگر آن منفی یا موهومی میباشد .

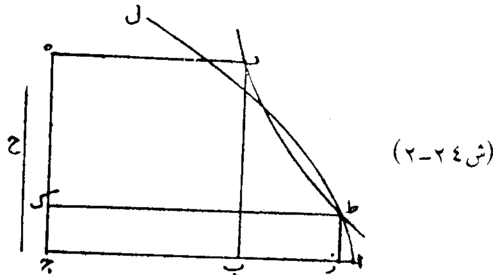
۲ ـ سهمی برأس (ا) وسهم (اج) و ضلع قائم (بج)

در (ش۲٤ـ۱) سهمی‌بر (د) میگذرد ، زیرا

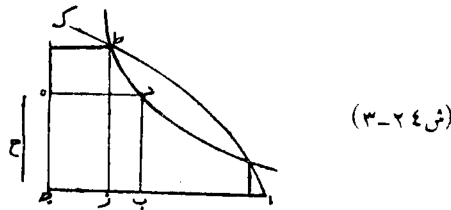
دب^2 = اب . ب ج



(ش ۲٤ـ۱)



(ش ۲٤ـ۲)



(ش ۲٤ـ۳)

و دو منحنی یکدیگر را در نقطهٔ دیگری قطع میکنند ، و برای فهم این مطلب اندك تأمل کافی است . در(ش ۲٤ـ۲) نقطهٔ (د) در خارج سهمی واقع است چونکه :

دب^2 < اب . ب ج

پس اگر دو منحنی بریکدیگر مماس شوند یا متلاقی گردند عمودوارد از نقطهٔ تقاطع بر (اج) بین نقاط (ا) و (ب) خط (اج) را تلاقی میکند و مسئله

ممکن است والا ممتنع میباشد ؛ و مهندس فاضل ابوالجود باین تماس یا تقاطع توجه نکرده وبغلط درحالتی که (ب‌ج) بزرگتر از (اب) باشد مسئله را ممتنع شمرده واین صنف همانست که ماهانی بدان برخورده .

در(ش۲٤ـ۳) (د) داخل سهمی واقع میشود و دومنحنی یکدیگر را در دو نقطه قطع میکنند .

خیام درشکل دوم ثابت میکند که اگر (ط) یکی از نقاط تقاطع باشد قطعه (ز ج) جواب معادله است و برهان او مانند دلیل حالت قبل میباشد ؛ بعد میگوید برهان درسایرحالات بهمین قیاس است، الا اینکه در شکل سوم‌دومکعب حاصل میشود یعنی مسئله دوجواب دارد ، زیرا هرعمودی از (جا) ضلع‌مکعبی جدا میکند چنانکه ثابت شد . پس معلوم شد که این صنف اشکال مختلفی دارد و بعضی از مسائل آن محال است وبتقاطع سهمی وهذلولی حل میشود [۱] .

***

۶ـ: $x^{۳} = Ax^{۲} + C$

یا $x^{۳} = ax^{۲} + ac^{۲}$

فرض میکنیم اب $= a$ و ب ج $= c$ باشد .

هذلولی مار بر (ج) با مجانب های (اد) و (اب) ؛

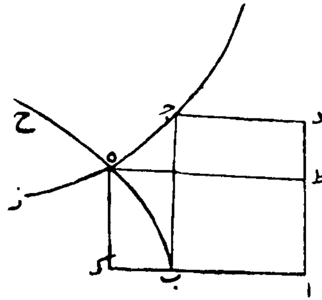
و سهمی برأس (ب) و سهم استقامت (اب) وضلع قائم (اب) را رسم میکنیم .

دو قطع ناچار یکدیگر را در نقطه ای مانند (ه) قطع میکنند و

---

۱ ـ معادلهٔ مفروض همیشه یك ریشهٔ حقیقی منفی دارد و دو ریشهٔ دیگر آن موهومی یا مثبت‌اند . خیام ابتدا ثابت میکند که اولین شرط امکان مسئله آنستکه $c<a$ باشد ؛بعد سه حالت $c = \frac{a}{۲}$ و $c > \frac{a}{۲}$ و $c < \frac{a}{۲}$ را تشخیص میدهد ودرحالت دوم‌میگوید؛$c<x<a$است و درهرحال عدهٔ نقاط تقاطع دوقطع را صحیح بیان میکند ؛ ولی فقط درحالت سوم بوجود دوجواب تصریح مینماید.

ا ك = x است . (ش۲۵)



(ش ۲۵)

استدلال خیام مطلبی زائد بر آنچه در معادلات قبل گفته شد ندارد ، ودر پایان میگوید این صنف بیش از یك شکل ندارد و جمیع مسائل آن ممکن است [۱] وبتقاطع هذلولی وسهمی حل میشوذ .

حل معادلات درجهٔ سوم چهار جمله ای

$$x^{3} + Ax^{2} + Bx = C$$ -۱

یا $$x^{3} + ax^{2} + b^{2}x = b^{2}c$$

فرض میکنیم : به = b وبج = c و بد = a باشد ، مستطیل (بك) را طرح میکنیم . قطوع لازمه عبارتند از : نیم دایره ای بقطر (بج) ؛ هذلولی مار بر (ج) با مجانهای (هب) و (ه ك) هذلولی ناچار دایره را در نقطه ای مانند (ز) قطع میکنند و بل = x است . (ش۲۶)

برهان ـ سطح (زه) معادل سطح (بك) است وچون جـزءِ مشترك را اسقاط کنیم معلوم میشود که سطوح (زب) و (لك) معادلند، پس $\frac{\text{هب}}{\text{بل}} = \frac{\text{زل}}{\text{لج}}$ ولهذا نسبت بین مربعات این قطعات برقرار است، اما مربع نسبت (زل) به (لج)

---

۱ ـ معادلهٔ مفروض همیشه یك ریشهٔ مثبت دارد ودو ریشهٔ دیگرش موهومی میباشند .

(ش ٢٦)

بموجب خواص دایره برابر دل/لج میباشد ، پس جسم (^٢ه‌ب . ل‌ج) معادل‌جسم (^٢ب‌ل . د ل) است بهردو (^٢ه ب . ب‌ل) رامی‌افزائیم چنین نتیجه میشود :

^٣ب‌ل + ^٢ب‌ل . ب‌د + ^٢ه‌ب . ب‌ل = ^٢ه‌ب . ل‌ج

یعنی $x^{3} + ax^{2} + x \cdot b^{2} = c \cdot b^{2}$ فهوالمطلوب

پس این صنف بیش از یك شکل ندارد و تمام مسائل‌آن ممکن است[١] وبخواص دایره وهذلولی حل میشود .

***

$$x^{3} + Ax^{2} + C = Bx \quad -٢$$

یا : $x^{3} + ax^{2} + b^{2}c = b^{2}x$

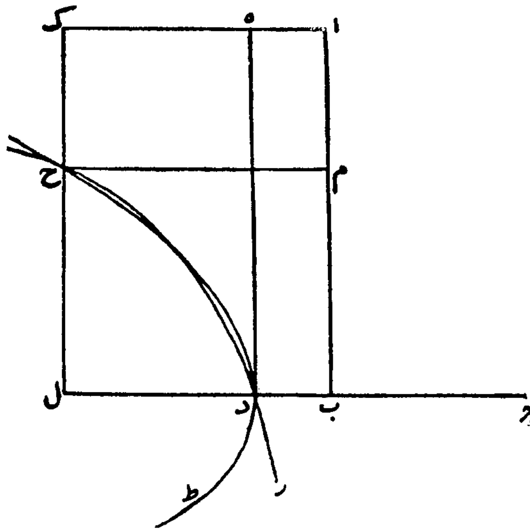
فرض میکنیم : اب = b م ب‌ج = a و ب‌د = c باشد .

مستطیل (ب‌ه) را طرح میکنیم .

قطوع لازمه عبارتند از : هذلولی مار بر (د) با مجانبهای (اب) و(اه) ؛ هذلولی برأس (د) وسهم استقامت (ب‌د) واضلاع قائم ومائل برابر (دج). دو قطع درنقطهٔ (د) مشترکند ، پس اگر در نقطهٔ دیگری مماس یا متلاقی شوند مسئله ممکن و الا ممتنع است ، واگر در نقطهٔ دیگر متقاطع باشند ناچار در دو نقطه متقاطع خواهند بودواگر (ح) نقطهٔ مشترکی ازآنها باشدب‌ل = x است.(ش٢٧)

---

١ ـ معادله مفروض همیشه یك ریشه مثبت دارد و دوریشهٔ دیگرش منفی یاموهومی‌هستند



(ش۲۷)

برهان ـ سطوح (اح) و (اد) وبالنتیجه سطوح (مد) و (هح) معادلند وچون (دح) را بهر دوبیفزائیم سطوح (مل) و (هل) معادل میشوند ، پس :

مربع حل / مربع لد = مربع اب / مربع بل

اما کسر طرف راست مساوی جل / لد است (۱)

پس :

۲بل . بج + ۳بل = ۲بل . ج ل = ۲اب . لد

بدوطرف (۲ ا ب . ب د) را میافزائیم .

۲ ا ب . ب د + ۲ ب ل . ب ج + ۳ب ل = ۲ ا ب . ب ل

یا $x \cdot b^2 = x^3 + a \cdot x^2 + b^2 \cdot c$

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلفه دارد و بعضی از مسائـل آن دارای دوجواب وبعضی ازمسائلش ممتنع است (۲) و بخواص دوهذلولی‌حل میشود

---

۱ ـ بنا بخاصیت اربعهٔ متناسبه .

۲ـ معادله مفروض ، همیشه یك جواب منفی دارد ودوریشهٔ دیگرش موهومی یا حقیقی و مساوی (نظیر تماس دو هذلولی) و یا بـالاخره حقیقی و متمایزند . خیام فقط حالت اخیر را صریحاً اسم میبرد .

۳- $x^3 + Bx + C = Ax^2$

یا $x^3 + b^2x + b^2c = ax^2$

فرض میکنیم ب ه $= a$ و ب ج $= b$ و ا ب $= c$ باشد.

بقطر (ا ه) نیمدایره ای طرح میکنیم.

حالت اول ـ (ج) داخل نیمدایره است. (ب ج) را امتداد میدهیم تا نیمدایره را در (ز) قطع کند و سطح (اج) را تمام کرده بر (زج) سطح(زح) را معادل این سطح طرح میکنیم. نقطه (ح) داخل یا برمحیط یا در خـارج نیم دایره قرار میگیرد. درصورت اول بر (ح) هذلولی با مجانب های (ج ز) و(جم) طرح میکنیم و آن ناچار دایره را بر دونقطه مانند (ل) و (ن) تلاقی میکند و (بك) و(بف) اضلاع مکعب مطلوب‌میباشند(ش۲۸). (برهان‌خیام بقیاس براهین اشکال قبل است).

(ش۲۸)

اگر (ح) خارج دایره قرار گیرد قطع را رسم میکنیم. پس اگر با دایره مماس شود یا آنرا تلاقی کند (خیام میگوید این نوع از این صنف را ابوالجود در استخراج مسئله ای کـه بعداً خواهیم گفت ذکـر کرده) برهان همانست که درفوق گفیم، واگر دایره را قطع نکند سطح را بر خطی اقصر یا اطول از (زج) طرح میکنیم؛ پس اگر قطع دایره را قطع نکند مسئله ممتنع است وبرهان امتناع بعکس آنست که گفتیم.

حالت دوم ـ(ج)برمحیط یا خارج دایره است. (ج ز) را امتدادمیدهیم

ومستطیلی طرح میکنیم که یکی از روس آن (ج) باشد بطوری که اگر بررأس مقابل (ج) قطعی چنانکه گفتیم مروردهیم دایره را بتماس یاتقاطع ملاقات کند واین مطلب با اندك امتحان و تفحص بکمك قیاس ساده ای فهمیده میشود،وخیام این قیاس را بعهدهٔ محصلین واگذاشته ومیگوید آنکس که اینقدر قوهٔ استنباط نداشته باشد چیزی از این رساله عاید او نمیشود زیرا این رساله مبتنی بـر سه کتابی است که مصنف قبلا بآن اشاره کرده است (کتاب اقلیدس دراصول‌هندسه و کتاب دیگر او موسوم به معطیات و دو مقالهاز کتاب ابولونیوس درمخروطات)

برهان استحاله ــ برهان بر استحالهٔ حالت ممتنع بعکس برهانی است که در حالت امکان ذکـر کـردیم از اینقرار : ضلع مکعب مطلوب باید از a کوچکتر باشد ، چه اگر باآن مساوی باشد $x^3 = ax^2$ خواهد بود و اگر از آن بزرگتر باشد x^3 به تنهائی از ax^2 بزرگتر میشود، پس واجب است کـه $x<a$ باشد پس طولی مانند (بف) برابر x از (به) جدا کرده از (ف) عمودی بـر (به) اخراج میکنیم وبرهان سابق را بعکس ایراد میکنیم . ثابت میشود کـه محل‌تلاقی عمودودایره برقطعی که درحالت استحالهبالفرض‌دایره‌را قطع نمیکند قراردارد واین ممتنع است .

خیام گوید چون گمان میکنیم که این استقراء برای بعضی از مطالعه کنندگان این رساله مشکل باشد بیانات فوق را بهمین جا ختم کـرده قانونی بی نیاز از این استقراءِ میآوریم و آن اینست که درهرحال برطول دلخواهی واقـع بر امتداد (بج) مستطیلی که رأس یکی از زوایایش (ج) و معادل سطح (اج) باشد طرح کرده بررأس مقابل هذلولی با مجانب های (زج) و(جم) مرورمیدهیم اگر این منحنی دایره را بتماس یا تقاطع ملاقات کند مسئله ممکن و الا ممتنع است وبرهان براستحاله همانست که ذکر کردیم .

ملاحظه تاریخی ــ خیام گوید قبل از من یکی از مهندسین باین صنف دچار شده وآنرا حل کرده است ، ولی اشکال مختلفهٔ آنرا توضیح نداده و متوجه

نشده است که بعضی از مسائل آن چنانکه گفتیم ممتنع میباشد ؛ و اما مسئله‌ای که یکی از متأخرین درضمن حل آن بصنف فوق برخورده این‌است :

عدد ده را بدوجزء چنان تقسیم کنید که مجموع مربعین آنها باضافهٔ خارج قسمت جزءِ بزرگتر برجزءِ کوچکتر ۷۲ شود.

اگر یکی از اجزاءِ x و دیگری مطابق عادت جبریها در اینگونه مسائل x—۱۰ باشد حل مسئله بحل این معادله منجر میشود:

$$x^{۳} + ۵ + ۱۳\frac{۱}{۲}x = ۱۰x^{۲}$$

و در اینحالت نقاط (ج) و(ح) داخل دایره واقع میشوندوبعدازاینکه جماعتی از فضلای عراق رحمهم‌الله که ابوسهل کوهی نیز جزءِ آنان بود از حل این مسئله عاجز شدند این مرد دانشمند آنرا حل کرد جزاینکه این حل کننده که خداوند از اوراضی‌باد با فضل وعلّو مقامی که در ریاضیات دارد متوجه این اختلافات‌نگردیده‌است‌وچنانکه‌دیدیم‌دربعضی ازمسائل این صنف معادلات ممتنعه وجود دارد ؛ واین فاضل ابوالجودالشنی است .

***

$$C + Bx + Ax^{۲} = x^{۳} \qquad -٤$$

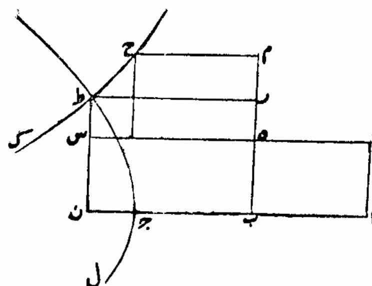
یا

$$x^{۳} = ax^{۲} + b^{۲}x + b^{۲}c$$

فرض میکنیم به = b و اب = c و بج = a

قطوع لازمه : طول اختیاری (ه م) را بر امتداد (به) اختیار کرده سطح (ه‌ح) را معادل (اه) طرح‌میکنیم وبر(ح) هذلولی بامجانبهای (ه‌م) و(ه‌س) مرور میدهیم . هذلولی دیگری برأس (ج) و سهم استقامت (بج) و اضلاع مایل وقائم مساوی (اج) طرح میکنیم . دوقطع ناچار یکدیگر را درنقطه ای مثل(ط) قطع‌میکنند و بن = x . (ش۲۹) .

برهان خیام مانند براهین‌حالات قبل است‌ودرپایان مینویسد ، این صنف



(ش۲۹)

بیش از یك شکل ندارد و تمام مسائل آن ممکن است (۱)

***

۵- $x^3 + Ax^2 = Bx + C$

یا $x^3 + ax^2 = b^2x + b^2c$

فرض میکنیم ب د $= b$ و ج پ $= a$ و س $= c$. وبرحسب اینکه c بزرگتر یا کوچکتر از a یا مساوی آن باشد سه حالت پیش میآید:

حالت اول : $c < a$ ـ طول (اب) را مساوی (c) جدا نموده سطح (ا د) را تمام کرده برطول دلخواه (د ز) واقع برامتداد (ب د) سطح (ه د) را معادل (ا د) طرح میکنیم .

قطوع لازمه : هذلولی ماربر (ه) با مجانبهای (ز د) و (دع) . هذلولی برأس (ا) وسهم (ا ب) واضلاع قائم ومائل برابر (ا ج) . دو هذلولی ناچار یکدیگر را درنقطه‌ای مثل (ح) قطع میکنند و ب ك $= x$ (ش۳۰) برهان خیام برصحت این حکم شبیه براهینی است که قبلا ذکر شد .

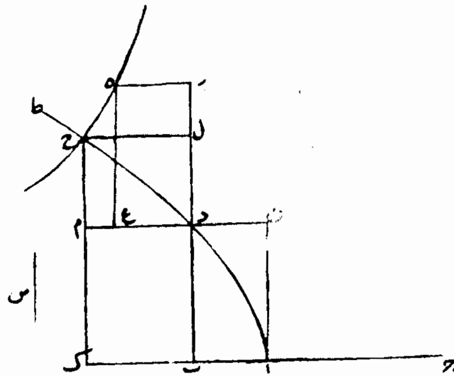
حالت دوم : $c = a$ در اینصورت ب د $= x$ است .

زیرا $b^3 + ab^2 = b^2b + b^2a$

ومعلوم است که در اینحالت جواب معادله درمعادلهٔ هفتم نیز صدق میکند

---

۱ ـ معادلهٔ مفروضه یك جواب حقیقی ومثبت دارد ودوریشهٔ دیگرش منفی یاموهومی است



ش (۳۰)

حالت سوم $c>a$ - طول (ا ب) را مساوی c جدا کرده هذلولی دوم را بر (ج) مرور میدهیم وبقیه برهان شبیه بحالت اول است .

پس معلوم شد که این صنف اشکال مختلفه دارد وجواب یکی از حالات آن درمعادلهٔ هفتم صدق‌میکند وتمام مسائلش ممکن است [۱] وبخواص‌دوهذلولی حل میشود .

***

$$x^{3} + Bx = Ax^{2} + C \qquad - ۶$$
$$x^{3} + b^{2}x = ax^{2} + b^{2}c \qquad \text{یا}$$

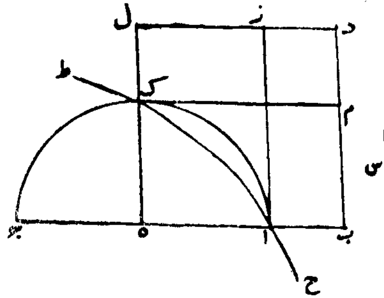
فرض میکنیم ب ج $= a$ و ب د $= b$ و س $= c$

حالت اول - $c<a$ - (ا ب) را مساوی c جدا کرده سطح (ا د) را تمام میکنیم .

قطوع لازمه: نیمدایره ای بقطر (ا ج) - هذلولی مار بر(ا) بامجانبهای (ب د) و (د ز) (ش ۳۱) هذلولی خط (ا ز) را که بر دایره مماس است‌قطع میکند ولهذا دایره را نیز تلاقی میکند زیرا اگربین دایره‌و (ا ز) قرار گیرد چنانکه ابلونیوس در شکل ۱۶ از مقالهٔ دوم ثابت کرده است ممکن است از [۱]

---

۱ - معادلهٔ مفروضه یك ریشه مثبت دارد ودوجواب دیگر آن منفی یا موهومی است.



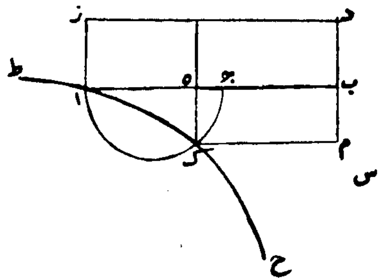
ش (۳۱)

خطی برقطع مماس کنیم واین خط یا بین (ا ز) ودایره قرار میگیردواین محال است ویادرخارج (ا ز) ودایره واقع میشود ؛ پس (ا ز) بین قطع و این مماس قرار میگیرد واین نیز محال است ، پس قطع بین دایره و (ا ز) واقع نمیشود ولهذا دایره را قطع میکند پس ناچار درنقطهٔ دیگری مانند (ك) نیز با آن مشترکست (ش ۳۱) جواب ب ه = x برهان این حالت بقیاس حالات قبل است :

حالت دوم a = c دراین حالت x = c واین‌مقدار درمعادلهٔ هفتم نیزصدق میکند .

حالت سوم a < c برهان بقیاس حالت قبل است (ش ۳۲)

پس ثابت شد که این صنف اشکال مختلفه دارد وجواب یکی از انواع آن درصنف هفتم صدق میکند وتمام مسائل آن ممکن است (۱) وبخواص دایره وهذلولی حل میشود .



(ش۳۲)

۲ ـ معادلهٔ مفروضه همیشه یکریشهٔ مثبت دارد ، در حالت اول ممکن است دو ریشهٔ دیگر نیز حقیقی باشد ولی درحالات دوم وسوم دو جواب دیگر موهومی هستند .

***

$$x^{3} + C = Ax^{2} + Bx \quad : \quad -۷$$

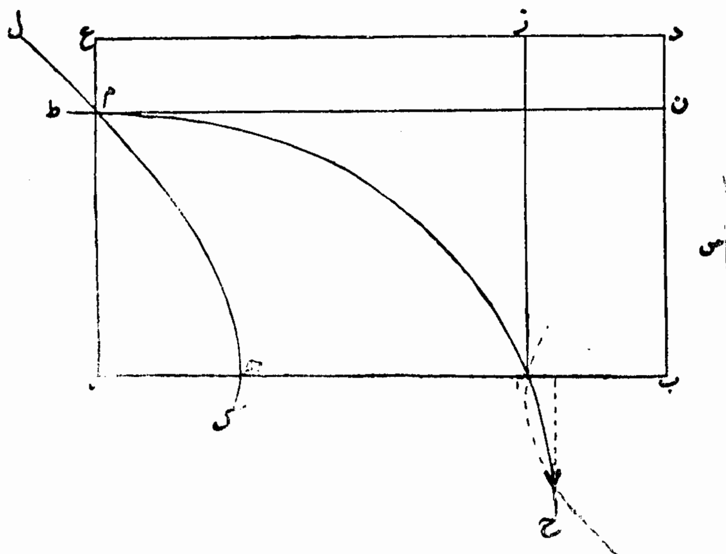
یا: $x^{3} + b^{2}c = ax^{2} + b^{2}x$

فرض میکنیم ب ج $= a$ و ب د $= b$ و س $= c$

حالت اول ـ $a > c$. (ا ب) را مساوی c جدا کرده (ب ز) را تمام میکنیم .

قطوع لازمه عبارتند از: هذلولی‌مار بر (ا) بامجانبهای (ب د) و(د ز) ـ هذلولی با رأس (ج) وسهم‌استقامت (ب ج) واضلاع قائم ومایل برابر (ا ج) .

دو قطع یکدیگر را درنقطه ای مانند (م) قطع میکنند و $x =$ ب ه است (برهان بقیاس حالات قبل است) (ش ۳۳)

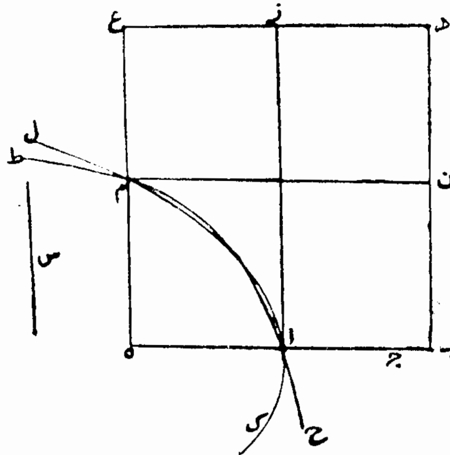


ش (۳۳)

حالت‌دوم ـ $a = c$ پس $x = a$. این مقداردرمعادلهٔ ششم‌نیزصدق‌میکند.

حالت سوم ـ $a < c$ هـر دو قطع را بر (ا) مرور میدهیم پس اگـر یکدیگر را در نقطهٔ دیگری ملاقات کنند خواه در این نقطه بـرهم مماس شوند ویا متقاطع باشند (در این حالت بموجب مقالهٔ چهارم مخروطات یکدیگر رادر

دو نقطه قطع میکنند) مسئله ممکن والا ممتنع است ؛ و درحالت تقاطع ازنقاط تلاقی عمود هائی بر(ب ه) فرود میآوریم (ش ۳٤) و از اینجا دو مقدار برای x پیدا میشود ؛ وبرهان این حکم مانند حالت قبل است پس معلوم شد که این صنف انواع مختلفی دارد وبعضی از آنها ممتنع اند .



ش (۳٤)



این بودراه‌حل معادلات درجهٔ سوم که خیام آنها را برحسب مثبت یامنفی بودن‌ضرایب‌جمله‌های‌درجهٔ دوم واول‌ونیزمثبت یا منفی‌بودن جملهٔ‌معلوم بچهارده شکل یا صنف در آورده وچنانکه یاد آوری کردیم فقط دو صنف از این‌معادلات قبل از خیام حل وبحث شده و بقیه که دوازده صنف باشد ازاکتشافات‌وتحقیقات علمی خیام است وباید دانست که اکتشافات خیام در جبر و مقابله منحصر بحل و بحث معادلات درجهٔ سوم نیست بلکه دربسیاری از مباحث نیز مطالعات خاص دارد که درآثار پیشینیان دیده نمیشود وبرخی از این تحقیقات را دانشمندان مغرب زمین دنبال کرده ووبعضی راهم‌در کتابهای‌علمی‌جدید بنام خود معروف کرده‌اند ؛ ازآنجمله‌مثلث حسابی پاسکال و دو جمله‌ای نیوتن که چنانکه در بخش سوم این کتاب‌شرح خواهیم داد ازکارهای علمی خیام میباشد .

ونیز اکتشافات وتحقیقات دیگر خیام در ریاضیات مربوط بنجوم و تقویم که آنهارا میتوان از بزرگترین شاهکارهای علمی جهان دانست .



بخش سوم

استفادهٔ دانشمندان مغرب زمین از جبر و مقابلهٔ خیام

از قرن پنجم تا دهم میلادی ظلمت جهل و بربریت سرتاسر اروپا را فرا گرفته بود ؛ زیرا بواسطهٔ استیلای قبایل بربر وانقراض دولت روم غربی درقرن پنجم ، تا مدتی نزدیك به پانصد سال اروپا در آتش هرج ومرج واغتشاش ونا امنی وغارتگری وخونریزی میسوخت واحدی توجه بعلم نداشت ، حتی اولیای دین‌هم ازسواد بی‌بهره بودند . پس از اینکه اروپا کمی آرام شد ، سلاطین و زمامداران بفکر کسب علم و نشر دانش در کشورهای خود برآمدند . مقارن همان اوقات کشورهای پهناور اسلامی از ترکستان گرفته تا افریقا و اسپانیاهریك دانشگاهی محسوب میشد وآنجا دانشمندان بازار فضل ودانش راگرم ورائج کرده بودند نخستین فردی که در اروپا بدانشمندی اشتهار یافت ژربر (Gerbert) فرانسوی میباشد که درپایان عمر بمقام پاپی رسید واوبرای کسب علم باسپانیا که آن زمان مملکتی اسلامی بود و آندلس نامیده میشد رفته نزد دانشمندان آن سرزمین به زبان عربی تحصیل علم نمود ودرریاضیات وهیئت ونجوم دارای مقامی شد و چون بفرانسه برگشت بنشر معلوماتی که دراسپانیا فرا گرفته بود همت گماشت‌واز آن

پس دانش‌طلبان اروپا ممالك اسلامی را منبع علم وحکمت شناختندبآنجامسافرت کردند وبتحصیل زبان عرب ومعلومات فضلا وحکمای اقطار ما پرداختند ؛ واز قرن یازدهم تاسیزدهم میلادی اوقات دانشمندان بیشتر مصروف ترجمه‌کتب علمی اسلامی بود وچون آنزمان زبانهای اروپائی هنوز برای ادای مطالب علمی‌وفلسفی پخته و ورزیده نشده بود ترجمه ها را بزبان لاتین میکردنـد ، وازاینرو درآن روزگار اهل فضل و ادب چاره جزفرا گرفتن زبان لاتین‌نداشتندولیکن کسانی که میخواستند درعلم وفلسفه تبحر کامل حاصل‌نمایند زبان عرب نیز تحصیل میکردند که بسرچشمهٔ معرفت دست داشته باشند (۱).

پس ازآنکه فن چاپ اختراع وشایع شد کتابهای مزبور را چاپ کردند و تا قرن چهاردهم و پانزدهم میلادی نیز ترجمه وچاپ کتابهای عربی جریان‌داشت واین غیراز ترجمه‌هائی است که اروپائیان درنهضت علمی‌اخیر خود از کتب‌عربی وفارسی و زبانهای دیگر شرقی کرده و میکنند و از اینراه استفاده‌هائی غیراز آنچه درقرون وسطی میکردند مینمایند .

کتاب جبر ومقابلهٔ خیام نیز مثل سایـر مؤلفات دانشمندان اسلامی مدت چند قرن مورد استفادهٔ دانشمندان اروپا بود و تـا قرن شانزدهم و هفدهم یعنی تا زمان نهضت علمی اروپائیان (معروف به دورهٔ رنسّانس) بمطالب مندرج درآن مستقیماً استناد می‌جستند . پس از این دوره که دانشمندان اروپا در هر یـك از رشته‌های علمی بتدریج پیشرفت‌های محسوسی پیدا کردند چنین بنظر میرسید که دیگر احتیاجی بمطالعه و تحقیق درآثار قدما ندارند ، وکم کم نـام دانشمندان قدیم از صفحات کتابهای علمی حذف شد وبجای آنها نام دانشمندان جدید قرار گرفت ؛ با اینحال بعضی از کتابهای علمی‌قدیم و ازجمله کتاب جبر ومقابلهٔ‌خیام

---

(۱) «سیر حکمت دراروپا» جلد اول .

هیچگاه کهنه نشد و در قرون اخیر ، حتی درقرن بیستم نیز مورد توجه‌اروپائیان واقع گردید ؛ و اینك نام ریاضی دانانی که از قرن هیجدهم تاکنون توجه باین کتاب داشته‌اند ذکرمیکنیم :

در سال ۱۷٤۲ ژرار مرمان (Gerard Meerman) و پس از او منتکـولا ریاضی دان قرن هیجدهم توجه دانشمندان را بجبرخیام معطوف داشت ؛ پس‌ازاو دکتر گارتز (Gartz) تحقیقاتی دربارهٔ مطالب این کتاب نموده و سپس در سال ۱۸۳٤ سدیو (Sédillot) راجع بیك نسخهٔ خطی از جبر و مقابلهٔ خیام کـه در کتابخانهٔ سلطنتی موجود بوده است شرحی نوشته و کمی بعد شال (Chales) در کتاب مهم خود موسوم به «نظر تاریخی راجع به بسط روش‌های هندسی» باستناد مقالات سدیو اظهار میدارد که مطالعهٔ کتاب جبرخیام ازلحاظ تاریخ علوم‌ریاضی خیلی مفید است . درهمین ایام لیبری (Libri) نسخهٔ کاملی از این کتاب نفیس در کتابخانهٔ ملی پـاریس بدست آورد و مورد مطالعه قرار داد و پس از او وُپکـه (Woepcke) در۱۸۵۱ کتابی باسم (جبر عمرالخیامی) منتشر ساخت ؛ و بالاخره داوودکازیر (Daoud S. Kasir) نسخه‌ای ازجبر و مقابلهٔ خیام متعلق به‌پرفسور اسمیت معلم دانشگاه‌کلمبیا بدست آوردهٔ وآنرا بانگلیسی ترجمه کرده و درسال ۱۹۳۱مسیحی درنیویورك بطبع رساند ؛ وهمین توجه دانشمندان کشورهای‌مختلف اروپا و امریکا درقرون اخیر نسبت به جبر ومقابلهٔ خیام ؛ نشانهٔاهمیت وشخصیت علمی‌آن دانشمند بزرگ وارزش مطالب مندرج در کتاب او میباشد .



اروپائیان برای معادلات درجهٔ سوم ، از روش هندسی خیام الهام گرفته و آنرا تبدیل براه جبری نمودند .

اگر بتاریخ علوم ریاضی ، مخصوصاً جبر ومقابله درقرون اخیر توجه نمائیم بخوبی ملاحظه خواهیم کرد که حل معادلات درجهٔ سوم بطریقی کـه امروزه در بیشتر کتابهای درسی دیده میشود به‌کاردان (Cardan) نسبت داده شده‌است؛ولی با تحقیقات دقیقتر معلوم خواهد شد که‌کاردان راه حل معادلات درجهٔ سوم‌راعیناً از تارتاگلیا (Tartaglia) ریاضی دان ایطالیائی کـه در قرن شانزدهم میزیسته اقتباس و کشف آنرا بخود نسبت داده است [۱] تارتاگلیا نیز درسال ۱۵۳۵ برای حل معادلات درجهٔ سوم روش :

Scipio del Ferro de Bologne

را که در ابتدای قرن شانزدهم میزیست بکار بسته ، واین دانشمند اخیر برای‌حل معادلات مزبور مستقیماً از کتاب خیام استفاده نموده است ، ولی خیام برای حل اصناف مختلفهٔ معادلات درجهٔ سوم اکتشافاتی دارد که مخصوص اوست و قبلا در هیچیك از کتب ریاضی دیده نشده است .

پُل تانری (Paul Tannery) محقق تاریخ علوم ریاضی عقیده دارد که راه جبری حل معادلات درجهٔ سوم وچهارم بطریقی که امروز معمول است،همان راه هندسی خیام و استفاده از مقاطع مخروطی است و میگوید قبل از خیام ، ریاضی دانان میدانستند که اگرمحورین دوسهمی بریکدیگر عمود باشند ، چهار نقطهٔ تقاطع برمحیط یکدایره واقع میشود ، ولی نمیتوانستندآنرا ثابت نمایند ؛ خیام باثبات‌آن پرداخته وبرای حل‌معادلات درجهٔ سوم ازآن استفاده کرده‌است. بعدها اروپـائیان همان طریقه را با تبدیل راه هندسی بجبری‌برای حل معادلات درجهٔ سوم وچهارم بکار برده‌اند .

---

(۱) آقای دکترغلامحسین مصاحب درمجلهٔ ریاضیات و کتاب مثلثات که تألیف نموده‌کاردان را «عالم دزد» نامیده ودراروپا نیزکاردان بنام دزد ریاضی معروف میباشد .

استاد معظم آقای دکتر محسن هشترودی چگونگی استفادهٔ اروپائیان از روش خیام را دراختیار ما گذاشتند ؛ ضمن سپاسگذاری از معظم له طریقهٔ مزبور را ذیلا می‌نگاریم .

معادلهٔ درجهٔ سوم را قبلا باضرب کردن در x بمعادلهٔ درجهٔ چهارم بدل می کنیم ودرحل آن ریشهٔ $x=0$ را کنار میگذاریم .

معادلهٔ درجهٔ چهارم :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

را با تبدیل :

$$x = y - \frac{a}{4}$$

میتوان بمعادلهٔ $y^4 + Ay^2 + By + C = 0$ تبدیل کرد .

حال چون برای سهولت y را به x بنمائیم معادله بصورت :

$$(\alpha) \qquad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

نوشته میشود .

در این معادله $x^2 = y$ را جانشین می کنیم ، حل معادله به‌حل دستگاه :

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 + Ay + Bx + C = 0 \end{cases}$$

منجر میشود . از نظر هندسی مسئله به تقاطع دوسهمی بدل میشود که محورهای آنها برهم عمودند ؛ زیرا محور سهمی اول یعنی $x^2 = y$ محور oy میباشدومحور سهمی دوم موازی با ox می‌باشد .

چنین دوسهمی دارای چهارنقطهٔ تقاطع (حقیقی یا موهومی) می باشد که بریکدایره واقعند ومیتوان بسهولت با افزودن دو معادله دستگاه (۱) دائره را تعیین کرد ، یعنی دستگاه (۱) را بدستگاه (۲) :

$$(۲)\begin{cases} x^۲ = y \\ x^۲ + y^۲ + (A - ۱)y + Bx + C = ۰ \end{cases}$$

منجر میکنیم که معادلهٔ دوم دستگاه (۲) مجموع دو معادلهٔ دستگاه (۱) می‌باشد ومشاهده میشود که تعیین ریشه های معادلهٔ درجهٔ چهارم (a) به تعیین نقاط تقاطع دائرهٔ متغیر :

$$x^۲ + y^۲ + (A - ۱)y + Bx + C = ۰$$

با سهمی ثابت $x^۲ = y$ منجر میشود که طول نقاط تقاطع چهار ریشهٔ معادلهٔ (α) می‌باشد . بطریق هندسی حل دستگاه (۱) یعنی تقاطع دوسهمی که محورهای آنها برهم عموداند به تقاطع یکی از این سهمی‌ها با دائره مذکور بدل میشود و این مطلب از استنباطات خیام درحل معادلات درجهٔ سوم نتیجه میشود .

***

مثلث حسابی خیام (که دراروپا بنام مثلث حسابی‌پاسکال معروف‌شده‌است) و **دوجمله‌ای‌خیام** (که دراروپابنام دوجمله‌ای نیوتن معروف گردیده است)

هرگاه ارقامی را بترتیب زیر (جدول شماره ۱) ستون بندی کرده بشکل مثلثی درآوریم ، بطوریکه از ده سطر و ده ستون تشکیل شده باشد ؛ سطر اول فقط شامل عدد ۱ وسطر دوم شامل اعداد ۱ و۱ و در سطرهای بعد در زیر هر عدد مجموع همان عدد و عدد سمت چپ آن را بنویسیم (بافرض اینکه در سمت راست وسمت چپ هرسطر حتی سطر اول ، رقم صفر نوشته شود ؛

مثلا سطر دوم شامل اعداد ۱ = ۱ + ۰ و ۱ = ۰ + ۱ است ؛

و سطر سوم شامل اعداد ۱ = ۱ + ۰ و ۲ = ۱ + ۱ و ۱ = ۰ + ۱ میباشد ؛

و سطرچهارم‌شامل‌اعداد ۱ = ۱ + ۰ و ۳ = ۲ + ۱ و ۳ = ۱ + ۲ و ۱ = ۰ + ۱ است .

وبهمین روش میتوان سطرهای بعدی جدول را نوشت (میتوانید سطرهای یازدهم و دوازدهم و بیشتر از آنرا تا هرجا که حوصلهٔ شما یاری میکند

بنویسید) :(۱)

سطر اول	۱									
سطر دوم	۱	۱								
سطر سوم	۱	۲	۱							
سطر چهارم	۱	۳	۳	۱						
سطر پنجم	۱	٤	٦	٤	۱					
سطر ششم	۱	٥	۱۰	۱۰	٥	۱				
سطر هفتم	۱	٦	۱٥	۲۰	۱٥	٦	۱			
سطر هشتم	۱	۷	۲۱	۳٥	۳٥	۲۱	۷	۱		
سطر نهم	۱	۸	۲۸	٥٦	۷۰	٥٦	۲۸	۸	۱	
سطر دهم	۱	۹	۳٦	۸٤	۱۲٦	۱۲٦	۸٤	۳٦	۹	۱

جدول (۱)

---

(۱) جدول مزبور که در اروپا بنام مثلث حسابی پاسکال معروف شده است ، چنانکه توضیح خواهیم داد ، ازاکتشافات حکیم عمر خیام میباشد .

استادان علوم ریاضی دانشگاه تهران در کتب « جبر و آنالیز » که تألیف نموده اند ضمن تعریف « تبدیل ، ترتیب و ترکیب » مثلث حسابی پاسکال را نیز شرح داده اند ؛ ولی هیچکدام از آنها اشاره باینکه مثلث مزبور از اکتشافات خیام است ننموده ؛ جز آقای محمد حسن مهدوی که در کتاب «احتمالات وآمارریاضی» نام خیام را آورده آنهم در دو جملهٔ مختصر که از کتاب «ریاضیات برای همه » تألیف پرفسور هوگبن نقل کرده ، ولی در همین دو جملهٔ کوتاه آن حکیم بزرگوار را تجلیل نموده است .

دربین دبیران ریاضی دبیرستانهای پایتخت ، تا آنجاکه ما اطلاع داریم‌تنها کسی که تحقیقات دقیق و دامنه داری راجع به ریاضیات قدیم و اکتشافات ریاضی دانان ایرانی نموده وضمن مقالاتی‌در بعضی ازمجلات حق مطلب را دربارهٔ آنان بخوبی اداکرده است آقای ابوالقاسم قربانی میباشد . یك نمونه از مطالعات علمی ایشان درمقالهٔ بسیار عالمانه‌ای تحت عنوان « مثلث حسابی خیام (یاپاسکال؟) و دستور دو جمله‌ای خیام (یا نیوتن؟) » درمجلهٔ سخن شماره ۱۰ سال ۱۳۳۸ منعکس میباشدکه چون درعین حال ساده ونزدیك بفهم عمومی نوشته شده وازاین نظر مطالعهٔ آن برای‌کلیهٔ دانش‌پژوهان کشور سودمند خواهد بود ، لذا عیناً مطالب مزبوررا ازآنجا اقتباس کرده ، ضمناً بسهم خود ازتوجه و علاقمندی ایشان به پژوهش‌های علمی ، مخصوصاً زنده‌کردن نام دانشمندان قدیم ایران که مسلماً قسمت اعظم پیشرفت های علمی جدید نتیجهٔ مطالعات و تحقیقات دقیق آنان است سپاسگزاری مینمائیم .

اعداد این جدول دارای خاصیت‌هائی هستند که عده‌ای از آنهارا در اینجا شرح میدهیم :

۱- مجموع اعداد هرسطرمساویست با دوبرابرمجموع اعداد سطر قبل‌از آن ، مثلا مجموع اعداد سطر چهارم مساویست با۸ واین دو برابر مجموع اعداد سطر سوم است که ٤ میباشد .

۲- مجموع اعداد سطر n ام (اتم) مساویست با $۲^{n-۱}$ (دوبقوهٔ $n-۱$)
مثلا مجموع اعداد سطر دوم مساویست با $۲^{۱}$ ومجموع اعداد سطرسوم مساویست با $٤ = ۲^{۲}$ ومجموع اعداد سطر چهارم مساویست با $۸ = ۲^{۳}$ وغیره .

۳ - در هرسطر مجموع اعدادی که از سمت چپ در ستونهای زوج واقع هستند مساویست با مجموع اعدادی که درستونهای فرد قرار دارند .

مثلا درسطر چهارم مجموع اعدادی که از سمت چپ در ستونهای دوم و وچهارم قرار دارند مساویست با $٤ = ۱ + ۳$ ومجموع اعدادی هم که درستونهای اول وسوم (ازسمت چپ)قراردارند باز مساویست‌با $٤ = ۳ + ۱$.

٤ - هرعدد از جدول مساویست با مجموع اعدادی که درستون سمت چپ آن عدد ودرسطر های بالای آن واقع هستند .

مثلا عدد ۱۵ ازسطر هفتم (درستون سوم) مساویست با مجموع اعداد ٥و ٤ و۳ و۲ و۱ که درستون سمت چپ ۱۵ (یعنی ستون دوم) و درسطر های ششم و پنجم وچهارم و سوم ودوم و اول واقع هستند . (مورداستعمال اعداد این جدول را بعداً خواهیم دید) .

این جدول در همهٔ کتابهای درسی اروپایی مثلث حسابی پاسکال [۱] نامیده شده است . باید دید که آیا ریاضی دانان مشرق زمین قبل از پاسکال این مثلث‌را می شناخته‌اند یا نه ؟ یاد آوری میکنیم که پاسکال از۱۶۲۳ تا ۱۶۶۲ میلادی‌یعنی از ۱۰۳۳ تا ۱۰۷۳ هجری قمری می‌زیسته .

۱-به‌زبان فرانسو Triangle arithmétiqusیe de Paalc و به انگلیسی Pascal Triangle وبه آلمانی Pascalsches Dreick

قبل از پاسخ دادن باین سؤال نظر خوانندهٔ گرامی را بدستور های زیر جلب می کنیم :

$$(a+b)^{1}=a+b$$
$$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$$
$$(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$$
$$(a+b)^{4}=a^{4}+4a^{3}b+6a^{2}b^{2}+4ab^{3}+b^{4}$$
$$(a+b)^{5}=a^{5}+5a^{4}b+10a^{3}b^{2}+10a^{2}b^{3}+5ab^{4}+b^{5}$$

جدول (۲)

اگر این پنج دستور را با سطرهای دوم وسوم وچهارم وپنجم و ششم مثلث حسابی (جدول ۱) مقایسه کنیم درمی یابیم که درهر یك ازاین دستورها ضرائب عددی جمله ها همان اعداد سطر نظیر خود ازمثلث حسابی هستند .

مثلا در دستور پنجم ضرائب عددی جمله ها عبارتند از ۱و۵ و۱۰ و۱۰ و۵ و۱ واین اعداد همان اعدادی هستند که درسطر ششم مثلث حسابی ثبت شده‌است. این قاعده کلی است و مثلا سطر دهم مثلث حسابی ضرائب عددی بسط $(a+b)^{9}$ هستند که عبارتند از :

۱ و۹ و۳۶ و۸٤ و۱۲٦ و۱۲٦ و۸٤ و۳٦ و۹ و۱

فایده ومورد استعمال مثلث حسابی اینست که ضرائب عددی بسط دوجملهٔ $(a+b)^{n}$ را بازاء مقادیر مختلف n بدست میدهد .

صورت کلی دستورهای فوق را بیشتر اروپائیان دستور دوجمله ای‌نیوتن [۱] می‌نامند حال باید دید که آیا ریاضی دانان مشرق زمین قبل از نیوتن این دستور را می‌شناخته اند یا نه ؟ یادآوری می کنیم که نیوتن از ۱٦٤۲ تا ۱۷۲۷ میلادی یعنی از۱۰۵۲ تا ۱۱٤۰ هجری قمری می زیسته .

***

ریاضی دان بزرك ایرانی غیاث‌الدین جمشید کاشانی کتاب مفتاح‌الحساب‌را

۱ـ به زبان فرانسه Farmule de binôme de Newton

درسال ۸۳۰ هجری قمری یعنی تقریباً دویست سال قبل از تولد پاسکال ودویست‌و بیست سال قبل از تولد نیوتن نوشته است واز مقدمهٔ مفتاح‌الحساب پیداست که این کتاب شامل مطالبی است که در آن زمان برای یك نفر محاسب لازم بوده یعنی کتاب مفتاح یك کتاب درسی است ونه یك رسالهٔ تحقیقی.

اکنون قسمتی از باب پنجم از مقالهٔ اول مفتاح‌الحساب را ترجمه وتلخیص می‌کنیم ونشان می دهیم که «دستور دوجمله ای» و «مثلث حسابی» قرنها پیش از زمان پاسکال ونیوتن بر ریاضی دانان ایرانی معلوم بوده و تقریباً دویست سال پیش از آنکه این دانشمندان پا بعرصهٔ وجود بگذارند مطالب مزبور در کتابهای درسی اسلامی نوشته شده وطالبان علم آنهارا می‌آموخته اند وبرای‌آنکه ذهن خوانندهٔ گرامی دراین باره روشن ترشود متذکر می شویم که اولا موضوع باب پنجم مقالهٔ اول مفتاح الحساب استخراج ریشه های اعداد است مثل جذر و کعب وریشهٔ چهارم وغیره وثانیاً قدما بجای اصطلاحات ریاضی کنونی‌اصطلاحات دیگری بکار می‌برده اند که در بیشتر موارد با اصطلاحات امروزی تفاوت کلی دارد. برای‌مثال چند اصطلاح قدیمی را با اصطلاحات معادل آنها در اینجا می نویسیم تا قسمتی را که از مفتاح‌الحساب ترجمه می کنیم برای خواننده بهتر مفهوم شود.

اصطلاح قدیمی	اصطلاح کنونی	علائم قراردادی فعلی
مال یا مجذور یا مربع عدد	مربع عدد	$a^۲$
کعب یا مکعب عدد	قوهٔ سوم عدد	$a^۳$
مال مال عدد	قوهٔ چهارم عدد	$a^۴$
مال کعب عدد	قوهٔ پنجم عدد	$a^۵$
کعب کعب عدد	قوهٔ ششم عدد	$a^۶$
مال مال کعب عدد	قوهٔ هفتم عدد	$a^۷$
ضلع اول	ریشه (اسم عام)	

ضلع اول مال مال	ریشه چهارم	$\sqrt[4]{A}$
مضلع	قوه (اسم عام)	a^n یا $(a+۱)^n$
عدد منزل	نمای قوه	
مضلع	عددی که باید ریشه اش گرفته شود	
مضلع منطق	عدد گویا	مثل $\sqrt{۹}$
مضلع اصم	عدد گنگ	مثل $\sqrt{۱۱}$

درمقام مقابله با قوهٔ چهارم عدد a قوهٔ چهارم دو جمله ای $(a+۱)$ یعنی $(a+۱)^{٤}$ را منزلت مال مال می نامیده اند وضرائب عددی حمله ها را در بسط عبارت $(a+۱)^n$ اصول منازل مضلعات می گفتة اند . مثلا ضریب عــددی جملهٔ $a^۲$ دربسط $(a+۱)^{٥}$ اصل صف مال ازمنزلت مــال کعب نامیده می شده است . در دستور :

$$(a+۱)^{٤}=a^{٤}+٤a^{۳}+٦a^{۲}+٤a+۱$$

اعداد ٤ یعنی ضرائب $a^۳$ و a را اعداد دوطرف این منزلت وعدد ٦ راعدد وسط این منزلت می‌نامیده اند .

***

اینك ترجمه وتلخیص یك قسمت ازباب پنجم از مقالهٔ اول مفتاح الحساب (رجوع کنید به‌صفحات ۳۷ و۳۸ و۳۹ از مفتاح‌الحساب چاپ تهران در ۱۳۰٦ هجری قمری) :

راه دیگر برای بدست آوردن تفاضل یك قوه از دو عــدد صحیح متوالی یعنی محاسبهٔ $(a+۱)^n - a^n$ برای این باید اعدادی را کــه به اصول منازل مضلعات موسوم هستند بشناسیم ... بدانکه اصل منزلت مال [یعنی ضریب a در بسط $(a+۱)^۲$] فقط یك عدد است و آن ۲ می‌باشد واصول منزلت کعب [یعنی ضرائب $a^۲$ و a دربسط $(a+۱)^۳$] دو عدد است که عبارت از ۳ و۳ وبرای‌هریك ازمنزلت های بعدی اعداددوطرف را یك واحد بازاء هرصف زیاد می کنیم واگر

هر دوعدد مجاور از اصول یك منزلت را با هم جمع کنیم یکی از اعداد وسط از منزلت بعدی بدست می آید مثلا اعداد منزلت مکعب ۳ و۳ است که مجموعشان ۶ می‌شود پس ۶ عدد وسط منزلت چهارم است واصول منزلت چهارم ٤ و٦ و٤ می باشند ومجموع ٤ و٦ یعنی ۱۰ یکی از دوعدد وسط منزلت پنجم است و مجموع ٦ و٤ وسط دیگر است وبهمین قیاس اصول منازل تا بی نهایت بدست می آید. همانطور که درجدول زیر دیده می شود:

صفوف	اصول قوهٔ نهم	اصول قوهٔ هشتم	اصول قوهٔ هفتم	اصول قوهٔ ششم	اصول قوهٔ پنجم	اصول قوهٔ چهارم	اصول قوهٔ سوم	اصول قوهٔ دوم
صف قوهٔ هشتم	۹							
صف قوهٔ هفتم	۳۶	۸						
صف قوهٔ ششم	۸٤	۲۸	۷					
صف قوهٔ پنجم	۱۲٦	٥٦	۲۱	٦				
صف قوهٔ چهارم	۱۲٦	۷۰	۳٥	۱٥	٥			
صف مکعب	۸٤	٥٦	۳٥	۲۰	۱۰	٤		
صف مربع	۳٦	۲۸	۲۱	۱٥	۱۰	٦	۳	
صف ریشه	۹	۸	۷	٦	٥	٤	۳	۲

جدول ۳

وهرگاه بخواهیم تفاضل بین یك قوه از دو عدد صحیح متوالی [یعنی $(a+1)^n-a^n$] را بدست آوریم عدد کوچکتر یعنی a را در اصل صف ضلع متعلق به آن قوه ضرب می کنیم و مربع a یعنی a^2 را در اصل صف مربع و a^3 را در اصل صف مکعب ضرب می کنیم و بهمین طریق عمل را ادامه می دهیم تا اینکه جمیع قوای a که از قوهٔ مفروض کوچکترند در اصول منازل مربوطه

ضرب شوند وهمهٔ حاصلها را با هم جمع می کنیم ویك واحد بـر آن می افزاییم تفاضل مطلوب بدست می آید .

مثلا می خواهیم ۴^۵ — ۵^۵ را حساب کنیم . صفوفی را که کوچکتر از قوهٔ پنجم هستند رسم می کنیم و در آنها اصول مربوط بخودشان را در یـك ستون می نویسیم و عدد کوچکتر یعنی ٤ را درصف ضلع ومربع آن یعنی ۱٦ را در صف قوهٔ دوم ومکعب آن یعنی ٦٤ را درصف قوهٔ سوم و قوهٔ چهارم آن یعنی ۲۵٦ را در صف قوهٔ چهارم می‌نویسیم وبین آنها وبین اصول یك خط قائم رسم مـی کنیم سپس هرعدد را که درصف اصول واقع شده در عددنظیر خود از ستون قوا ضرب می کنیم وحاصل ها را درستون قائم دیگری ازجدول قرار می‌دهیم سپس‌اعدادی را که درجدول حاصل ضرب ها نوشته ایم با هم جمع می کنیم ویك واحد به آن می افزائیم ۲۱۰۱ حاصل می شود و این عدد مساویست با ۴^۵ — ۵^۵ .

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد که باید دراصول‌ضرب شوند	حاصل ضربها
صف قوه چهارم	۵	۲۵٦	۱۲۸۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	٦٤	٦٤۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱٦	۱٦۰
صف ضلع	۵	٤	۲۰

جدول ٤

و هرگاه بخواهیم تفاضل دو قوه از دوعدد غیر متوالی (یعنی $a^5 - b^5$) مثلا ۴^۵ — ۷^۵ را حساب کنیم ستون دیگری به جدول فوق اضافه می کنیم و در آن قوای متوالی تفاضل دو عدد یعنی ۳ = ٤ — ۷ را می نویسیم بطوریکه تفاضل یعنی ۳ درصف قوهٔ چهارم ومربع ۳ یعنی ۹ در زیر آن و قوهٔ چهارم آن در صف ریشه واقع شود. سپس اعدادی‌را که درصف حاصل ضربها واقع شده اند دراعداد نظیر آنها از ستون قوای تفاضل ضرب می کنیم وحاصل ضربهای اخیر را در یك

ستون قائم دیگر می نویسیم وسپس آنچه را درجدول اخیر نوشته ایم با هم جمع می کنیم وبه آن قوهٔ پنجم تفاضل یعنی $٢٤٣ = ٣^{٥}$ را مـی افزاییم عدد ١٥٧٨٣ حاصل می‌شود واین عدد همان عدد مطلوب یعنی $٧^{٥} - ٤^{٥}$ است .

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد که باید در اصول ضرب شوند	حاصل ضربها	قوای تفاضل که در حاصل‌ها ضرب شده‌اند	حاصل ضربهای دوم
صف قوهٔ چهارم	٥	٢٥٦	١٢٨٠	٣	٣٨٤٠
صف قوهٔ سوم	١٠	٦٤	٦٤٠	٩	٥٧٦٠
صف قوهٔ دوم	١٠	١٦	١٦٠	٢٧	٤٣٢٠
صف ضلع	٥	٤	٢٠	٨١	١٦٢٠

جدول ٥

***

با کمی دقت معلوم می شود که اولا جدول شمارهٔ ٢ همان جدول شمارهٔ١ یعنی مثلث حسابی است با این تفاوت که وضع قرار گرفتن اعداد درآنهامتفاوت است وجدول ٢ ستون آحادرانداردوثانیاً اگر در جدول شمارهٔ ٣ دو عدد صحیح متوالی‌را $a + ١$ و a بنامیم مفهوم این جدول‌با علائم قرار دادی کنونی دستور زیر است :

$$(a+١)^{٥} - a^{٥} = ٥a^{٤} + ١٠a^{٣} + ١٠a^{٢} + ٥a + ١$$

واز آنجا

$$(a+١)^{٥} = a^{٥} + ٥a^{٤} + ١٠a^{٣} + ١٠a^{٢} + ٥a + ١$$

وثالثاً اگر درجدول شمارهٔ ٤ دو عـدد صحیح غیر متوالی را a و b بنامیم مفهوم این جدول با علائم قرار دادی کنونی دستور زیراست :

$$(a+b)^{٥} - a^{٥} = ٥a^{٤}b + ١٠a^{٣}b^{٢} + ١٠a^{٢}b^{٣} + ٥ab^{٤} + b^{٥}$$

واز آنجا

$$(a+b)^{٥} = a^{٥} + ٥a^{٤}b + ١٠a^{٣}b^{٢} + ١٠a^{٢}b^{٣} + ٥ab^{٤} + b^{٥}$$

یعنی درست دستور دوجمله ای که امروز در مدارس ما تدریس می شود .
البته این دستور برای قوهٔ پنجم داده شده ولی قاعدهٔ متن مفتاح‌الحساب کلی است ومی‌توان آنرا برای هرقوهٔ دیگری نیز بکار برد . ایـن نکته شایستهٔ توجه است که بر طبق آنچه در مفتاح الحساب نوشته شده مثلا برای بدست آوردن ضرائب بسط دوجمله ای $(a+b)^7$ باید هفت سطراول مثلث حسابی را نوشت تا سطرهفتم آن که همان ضرائب مذکور است بدست آید اما ریاضی دان دیگر ایرانی ملا محمد باقر یزدی (قرن هفدهم میلادی) در کتاب عیون‌الحساب [۱] قاعده ای‌بیان می کند که این ضرائب را مستقیماً وبدون اینکه احتیاج بنوشتن شش سطراول مثلث حسابی باشد بدست می دهد.

نکتهٔ بسیار مهم دیگر این است کـه غیاث الدین جمشید درمقدمهٔ مفتاح الحساب بصراحت می‌نویسد که تمام جداولی که درآن‌کتاب هست خودش استنباط کرده مگر هفت جدول که جداول شمارهٔ ۳ و ٤ که غیاث‌الدین جمشید آنها را جداول اصول منازل نامیده است جـزء همین هفت جدول است یعنی غیاث‌الدین جمشید آنها را از پیشینیان خود اقتباس کرده ودر کتاب مفتاح نوشته است . بنا براین « مثلث حسابی » و «دستور دوجمله ای » مدتها قبل ازغیاث‌الدین‌جمشید شناخته شده بود .

طبیعی است که از خود بپرسیم کـه این مطالب که در زمان غیاث الدین جمشید در زمرهٔ مطالب معمولی وجاری ریاضیات بوده از کجا آمده و چه کسی این‌دستور ها را بدست آورده است . برای پیدا کردن جواب این سؤال بایـد بکتابهای حساب‌وجبری که پیش‌اززمان غیاث‌الدین‌جمشید تألیف شده ومخصوصاً بمباحثی ازین کتب که مربوط باستخراج ریشهٔ اعداد و یـا حل معادلات درجهٔ سوم به بالاست رجوع کنیم . در کتاب جبر ومقابلهٔ خیام که استاد گرامی جناب

۱ـ چند نسخهٔ خطی ازکتاب عیون‌الحساب در کتابخانهٔ مجلس موجود است و یك نسخهٔ خطی از آن که درتاریخ ۱۲٦٤ هجری قمری نوشته شده متعلق به استاد محترم آقای دکتر بیژن است که برای مطالعه در اختیار بنده گذاشته اند ،

آقای دکتر غلامحسین مصاحب درسال ۱۳۱۷ هجری شمسی بانضمام تاریخ علوم ریاضی تا زمان خیام منتشر کرده‌اند (صفحهٔ ۲۳۱) این عبارت هست . « هندیها برای استخراج جذر و کعب طرقی دارند که مبنی بر اندك تفحص است و آن عبارتست ازدانستن مربعات ارقام نه گانه وحاصل ضرب آنها دریکدیگر ومن دراثبات صحت این طرق وچگونگی نیل به مقصود از روی آنها کتابی تألیف کرده‌ام . در این کتاب بر انواعی که هندیان ذکر کرده اند انواع دیگری ازقبیل استخراج ریشه های چهارم وپنجم وششم وبالاتر افزوده‌ام و قبل از من کسی این مطالب را ذکر نکرده. براهین این کتاب عددی است و بر قسمتهای مربوط بـه حساب از کتاب اصول مبتنی می باشد »

کتابی که خیام به آن اشاره می کند به احتمال قوی عبارتست از رساله درصحت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب وشاید رسالهٔ مشکلات الحساب باشد . متأسفانه ازین دو کتاب فقط نامی باقی مانده وهنوز نسخه‌ای از آنها بدست نیامده است . نگارنده برای بدست آوردن این دو رساله تحقیقاتی کرده ام که انشاءالله نتایج آنها را بعداً خواهم نوشت .

ازاینکه خیام به‌صراحت‌در کتاب جبر ومقابلهٔ خود می گوید که استخراج ریشه های چهارم وپنجم وبالاتر را بـه طرق هندی افزوده و قبل ازو کسی این مطالب را ذکر نکرده است و نظـر باینکه مطالب مذکور بعد از خیام در کتب ریاضی نوشته شده و بعد هـا جزءِ مطالب درسی درآمده است می‌توان دانست که مخترع واقعی مثلث حسابی ودستور دوجمله ای (البته در حالت خاصی کـه قوهٔ دوجمله‌ای عدد صحیح مثبت باشد) همان ریاضی دان بزرك ایـران حکیم عمر خیام است که درقرن یازدهم میلادی یعنی درحدود شش قـرن قبل از پاسکال و نیوتن می زیسته وباید این ها را به نـام خیام نامید و گفت مثلث حسابی خیام و دستور دوجمله ای خیام .

خواننده تصور نکند که نویسندهٔ این مقاله برای بزرك جلوه دادن ریاضی دانان ایرانی خدای نخواسته درپی آنست که به دانشمندان بزرگی همچون‌نیوتن

وپاسکال جسارتی کنند . مقام شامخ این ستارگان قدر اول عالم علم خیلی عالیتر از آنست که اگر بگوییم فلان دستور را دانشمندان دیگری قبل از زمان آنان می دانسته‌اند چیزی از آن کاسته شود . این مطلب‌هم ناگفته نماند که ریاضیون مشرق زمین دستور دوجمله ای را فقط درحالتی که قوهٔ دو جمله ای عدد صحیح مثبت باشد بدست آورده‌اند ونیوتن آنها را بصورت کلی وجامع درآورده و تعمیم داده است .

اینك برای مزید اطلاع خوانندهٔ گرامی قسمتی از آنچه را در کتابهای خارجی راجع باین موضوع دیده ام در اینجا ترجمه می کنم :

از کتاب ریاضیات برای همه تألیف هگبن [1]

« بی شك فریبندگی اعداد مثلث شکل موجب شده است که کسانی به‌فکر مثلث حسابی پاسکال بیفتند واینکه این مثلث حسابی را مثلث حسابی پاسکال می نامند برای‌آنست که پاسکال اول ریاضی دان فرانسوی است که باحتمالات ریاضی که اساس تئوری جدید علم آمار است توجه کرد . در واقع سلسلهٔ مثلث حسابی را عمر خیام بدست آورد . این سلسله در کتاب آئینهٔ قیمتی چهارعنصر [2] معرفی شد واین کتاب درحدودسال ۱۳۰۰میلادی بوسیلهٔ ریاضی دان چینی چوشی که [3] در زمانی که امپراطوری مغول در اروپای شرقی پیش می رفت نوشته شده است.»

مؤلف کتاب ریاضیات برای همه پس از تشریح این مطلب همه جا مثلث حسابی را به‌نام مثلث حسابی خیام می نامد ودرجای دیگر همان کتاب می‌نویسد:

عمر خیام که دستور دوجمله ای را کشف کرد یك ماتریالیست با ایمان بود که می خواست حکمت را در عالم واقعی بکار برد و آنرا موافق میل خود از نو بسازد .

از کتاب تاریخ ریاضیات تألیف اسمیت [4] (جلد دوم صفحهٔ ۵۰۷) :

1- Lancelot Hogben 2- Précieux Miroir des Quatre Elements
3- Chu Shi kei 4- History of Mathematics
تألیف David Eugene Smith.

« قضیهٔ دو جمله ای ـ بسط عبارت $(a+b)^n$ بازاءِ مقادیر صحیح n یا لااقل وسیلهٔ بدست آوردن ضرائب آن مدتها پیش از آنکه به اروپا برسد ، در مشرق زمین شناخته شده بود حالت $n=2$ را اقلیدس (۳۰۰ سال قبل از میلاد) می دانست . اما تعمیم قاعده بازاءِ مقادیر دیگر n تا آنجا که اطلاع داریم در کتاب جبر عمر خیام (۱۱۰۰ میلادی) آمده است . »

« . . . تعمیم قضیهٔ دوجملهای بازاءِ مقادیر منفی و کسری n از نیوتن است»
(از صفحهٔ ۵۱۱ کتاب تاریخ ریاضیات) .

***

یکی ازکارهای علمی خیام که بعدها اروپائیان ازآن استفاده کردند ، تحقیقی است که دراصل توازی اقلیدس انجام داده وحاصل مطالعات خود را در رسالهٔ « فی شرح ما اشکل من‌مصادرات کتاب اقلیدس» بیان داشته است . بطوری که از مطالعهٔ رسالهٔ مزبور برمیآید ، خیام درصحت اصل اقلیدس تردید داشته، و بعد ها خواجه نصیرالدین طوسی کارهای خیام را از نو تشریح کرده و چندین قرن بعد نیز ساکری ایطالیائی (Saccheri) مجدداً همین بحث را پیش کشیده ، ولی انجام کامل این تحقیق واخذ نتیجهٔ قطعی تازمان لباچفسکی Lobatchewski بطول انجامیده است .

بحث دراصل توازی اقلیدس ضمن قسمتی از کارهای علمی خیام ، از طرف انجمن آثار ملی به استاد جلال الدین همائی محول شده ، و خوانندگان برای مطالعه این موضوع باید به تألیف ایشان مراجعه فرمایند .

نتیجه

از آنچه در این کتاب شرح داده شد ، اجمالا معلوم گردید که حکیم عمر خیام نه تنها دربین دانشمندان قدیم ایـران مقامی بس ارجمند داشته است ، بلکه اروپائیان نیز تـا همین قرون اخیر به مقام شامخ علمی او معترف بوده و اکنون هم هستند . اگر تمام مطالعات و اکتشافات علمی خیام را در ریاضیات و هیأت ونجوم وسایر علوم نادیده گرفته وفقط به تحقیقاتی که در بارهٔ تعیین دقیق مدت سال اعتدالی نموده است اکتفا کنیم، از روی انصاف اهمیت کار های علمی اورا تصدیق خواهیم کرد، زیرا بعلل مشکلات زیادی که دراعمال رصد ومحاسبات نجومی وجود دارد، تا اوایل قرن بیستم نیز منجمان اروپا اندازهٔ حقیقی مدت سال اعتدالی را نتوانسته بودند تعیین کنند ؛ چنانکه درقرن شانزدهم مسیحی طول سال مزبور را ٣٦٥/٢٤٢٥ روز معین کرده وتقویم گریگوری را روی این میزان غلط پایه گذاری کردند . در اواخر قرن نوزدهم طول سال اعتدالی را منجمان اروپا با محاسبه ورصد ٣٦٥/٢٤٢٢٤١ روز یافته اند که آنهم با مقدار حقیقی مختصر اختلاف دارد وآنچه را که امروز طبق محاسبات دقیق برای طول سال اعتدالی یافته اند عبارت است از :

$$\text{٣٦٥/٢٤٢١٩٨٧٩} - \frac{\text{٦١٤}}{\text{١٠}^{\text{١٠}}}t$$

(t بحسب سالهای ژولین معین میشود)

مقدار $\frac{\text{٦١٤}}{\text{١٠}^{\text{١٠}}}t$ آنقدر ناچیز است که در عمل میتوان از آن صرف نظر کرد و فقط رقم ٣٦٥/٢٤٢١٩٨٧٩ روز را بحساب آورد ؛ آنگاه می‌بینیم که حکیم عمرخیام

طبق محاسباتی که مبتنی بر رصد های مکرر وطولانی قبلی ویك سلسله محاسبات نجومی است مدت یکسال اعتدالی را چنین بدست آورده است :

۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۵۸

وچنانکه ملاحظه میفرمائید درجهٔ صحت ودقت این محاسبه تا ۶ رقم اعشار مطابق است با آنچه که امروز بآن رسیده اند ، وبهمین جهت است کـه تقویم جلالی که بامر سلطان ملکشاه سلجوقی بوسیلهٔ خیام و عده ای دیگر از منجمان بزرك ایرانی ، روی همین حساب صحیح درست شده ، بر تقویم گریگوری که از چند قرن پیش تا امروز درسراسر کشورهای متمدن مغرب زمین معمول شده‌است ترجیح دارد، واین مسئله درکلیهٔ کتابهای درسی وغیردرسی مورد تصدیق میباشد، از جمله درکتاب هیأت تـألیف آقایان قربانی ـ صفاری کـه اکنون در تمام دبیرستانهای کشور ما تدریس میشود درصفحهٔ ۵۲ چنین میخوانیم :

« تقویم جلالی (یا ملکی) ـ تقویم جلالی درزمان سلطان ملکشاه‌سلجوقی بوسیله حکیم عمر خیام وابوالمظفر اسفرازی ومیمون بن نجیب واسطی وخواجه عبدالرحمن خازنی وعده‌ای دیگر ازمنجمان بزرك ایرانی درست شد . آنان مدت سال را ۳۶۵ روز و ۵ ساعت و۴۹ دقیقه تشخیص داده چنین مقرر داشتند که سال از دوازده ماه سی روزی تشکیل شود وپنجروز در آخر سال بنام خمسهٔ مسترقه اضافه میکردند لذا سالهای ۴ و ۸ و ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و ۲۴ و ۲۸ و ۳۲ را کبیسه محسوب میداشتند . باید دانست که تقویم جلالی بهترین وسیلهٔ تطبیق سال‌عرفی با سال اعتدالی است واشتباه حاصل از آن نزدیك بیك روز درهر پنج هزار سال میباشد وبنا براین بر تقویم گرگوری مزیت دارد .»

ودر کتاب «گاه شماری در ایران قدیم» تألیف آقای سید حسن‌تقی‌زاده، صفحهٔ ۱۶۷ چنین میخوانیم :

« مهمترین و رایج‌ترین اصلاحی که در ایران بعد از اسلام بعمل آمده همانا ایجاد تاریخ جلالی (یا ملکی) بود که ملکشاه سلجوقی درسنهٔ ۴۷۱هجری قمری وقتی که اعتدال ربیعی در ۱۹ فروردین ماه قدیم واقع بود تأسیس نموده

واول سال را در اول حمل (روز اول بهار) قرار داد ، و بهمین جهت نوروز که تا آن وقت درسال شمسی سیار بود ثابت گردانیده وبنوروز سلطانی معروف شد ، وبرای ثابت نگاهداشتن آن در سال شمسی بنا بر معروف کبیسهٔ دقیقی بر قرار کردند که از کبیسهٔ گریگوری هم دقیق تر بوده است .»

در کتاب « جبر ومقابلهٔ خیام » تألیف آقای دکتر مصاحب نیز ذیل صفحهٔ ۱۹۹ ، مطالبی از دایرة‌المعارف اسلامی اقتباس کرده که باین جمله ختم میشود:

« لهذا تقویم جلالی از تقویم گرگوار دقیق تر است »

بنا بر آنچه ذکر شد میتوانیم خیام را حقاً یکی از بزرگترین مفاخر علمی وملی خود بشمار آوریم ، ولی معلوم نیست روی چه اصل همانطور که در دیباچهٔ این کتاب اشاره شده است آن حکیم بزرگوار را در تمام دنیا بنام یك شاعر ، آنهم یك شاعر دائم‌الخمر و رند وخراباتی معرفی کرده اند .

اتفاقاً درموقعی که آخرین صفحات این کتاب در مطبعه چاپ میشد . مجله معلم شماره ۲ـ۳ (دورهٔ دوم) بدست نگارنده افتاد که درآن مقاله ای راجع به حکیم عمر خیام بقلم نویسندهٔ عالیقدر معاصر آقای محمد جناب زاده درج شده بود، دریغ آمدم حقایقی‌را که دراین‌مقاله منعکس شده و مؤید نظر نگارنده می باشد بنظر خوانندگان محترم نرسانم ، لذا بعنوان حسن‌الختام ، کتاب حاضر را با نقل قسمتی از مقالهٔ مزبور ختم مینمایم :

خیام و پیرایه هائی که بر او بسته اند :

« برای بررسی وتحقیق آثار بزرگان‌واکتشاف جزرومد روحی‌آنان‌امروز قواعد صحیح علمی در دست است وبحکم آنکه مرد از « سخن » شناخته میشود باید گفت که رباعیات منسوب بخیام نیشابوری اثر یك رند خراباتی و فارغ از مسئله کفر و ایمان وآئین اخلاق است ، اما مطالعه در اوضاع و احوال زندگانی سیاسی ودینی عصر خیام بما مجال نمیدهد درباره کسی که بار ها بزیارت بیت‌الله الحرام رفته وبا اجلهٔ علماءِ وفضلا همزمان ومعاشر بوده و درنجوم و ریاضی مقام علمی ودرجهٔ اول را داشته است ، وکسیکه درآغاز قرن پنجم‌اسلامی میزیسته‌و

از منجمان بزرك بشمار میامده واصلاح تقویم را بنام (ملکشاه سلجوقی) انجام داده ودرحکمت‌وعلوم با مشاهیر عصر خودمانند غزالی و دیگران بحث ها نموده وکلید حل غوامض را در علوم در دست داشته است بتوان فرض نمود که عمرش با باده گساری ولا ابالیگری ومی ومعشوق گذشته باشد واینگونه رباعیات‌پریشان از مغز منظم وریاضی دان بزرگی تراوش کند که :

ازهرچه خوری بازشراب اولیتر — بـا سبز خطان باده ناب اولیتر

دنیا همه سربسر خرابست وبیات — در جای خراب‌هم خراب اولیتر

حکیم عمر خیام نیشابوری از این پلیدیها و افکار طوفانی و قلندری منزه بوده وباستناد آثاری که از او بـاقی مانده است این پوشاك رندی وعیاری که خیاطان سیاسی بر قامت او دوخته اند نارسا است واین قبا بر اندام او راست نمی آید . کسیکه زندگانی مادی دنیا ومقامات بلند آنرا پست بشمارد و پرهیزکاری او تا باینجا برسد که میگوید :

« از نابکاری آشکار ونهان دورم ؛ مانند روزه داران ازهرعملی بر کنارم و جز درراه عفاف گام برنمیدارم و با یاد خـدا افطار میکنم وگـروه گمراه از « حق » را راهنمائی وهدایت مینمایم ، برنامهٔ زندگانی من مانند پلی است که نابینایان را از خطر سقوط حفظ میکنند . » [۱]

هیچگاه‌خلاف ادعای خود خطاکار وشیدائی ازآب درنمیآید وطبل بیعاری را بصدا درنمی آورد زیرا مردم را برخود میشوراند وخشم زمان اورا درکام خود فرو میبرد ...

کتابی بنام (جامع‌البدایع) چاپ مصر در دسترس مطالعهٔ نگارنده قرار گرفت . این کتاب حاوی رسائل علمی وعالیه ای ازسؤال وجواب‌بزرگان علم‌و حکمت درهفده رساله است .

رسالهٔ سیزدهم اختصاص بعمر خیام دارد .

۱ـ اینها ترجمه اشعاری است بزبان عربی که بنام حکیم عمر خیام نیشابوری در کتاب « نزهةالارواح‌وروضةالافراح » شهرزوری ثبت شده است .

ابو نصر محمد بن عبدالرحیم النسوی قاضی نواحی پارس درسال ٤١٧ هجری در مکتوبی با بیانی بسیار بلیغ وفصیح در نهایت تواضع و فروتنی از حکیم عمر خیام جویای موضوعی درحکمت میشود ونامهٔ او با چند بیت عربی شروع میشود که مفاد آن اینست :

« ای نسیم عطرافشان صبا سلام مرا بعلامه حکیم عمر خیام برسان «بوسه زن برخاك آن وادی و مشکین کن نفس » تکریم وتعظیم از جانب من بگو و نیازمندی مرا از عطایای حکمت ودانش باو ابلاغ کن .

عمرخیام دانشمند وحکیمی است که ابرهای فضیلت وبزرگواری اوبیدریغ ریزش میکند، آب حیات باستخوانهای شکسته وپوسیده میدمد (کنایه از آنکه مرده را زنده میکند) ، مردهٔ جهل در گورستان نادانی را بعالم زندگی و دانش برمیگرداند، از فلسفهٔ ایجاد عالم وتکلیف ماآنچه جواب میدهد واستدلال دراین باره نماید دیگر جای چون وچرا باقی نمیگذارد . »

قاضی امام ابی نصر مزبور از شاگردان شیخ‌الرئیس ابن سینا بوده ولی فلسفه وحکمت خلقت جهان ووظیفه را در گیتی با این عنوان شروع میکند :

«حجةالحق نصرةالدین، سید حکماءِالشرق والغرب ابی‌الفتح عمربن‌الخیام»

آنچه در رساله های ۱۳ و ١٤ و ١٥ خوانده میشود ، صرف نظر از طرح مسائل مشکل ولاینحل که اهل نظر ومتکلمان درآن باره بسیار سخن رانده ودرمانده‌اند وخیام همه را پاسخ قانع کننده داده است . احترام وخضوع «سائل » که‌خود از مشاهیر علم ودانش است وازقضات وفقهاءِ بزرك زمان بشمار میرفته ، علومقام خیام را مجسم میکند. آیا سزاوار است از روی بیخردی ونادانی بعلل جریانهای نامرئی سیاسی این مرد بزرك را برای تأمین آرزوها ومطامع بیگانگان که همهٔ مقدسات ما را ازطریق فریبکاری میخواهند لجن مال کنند « رند خراباتی ومست طافح » بشناسیم واورا ازمقام بلندی که درعلم وحکمت ونجوم داشته است‌سقوط داده اجازه دهیم که میکده ها ومجامع آلوده بهوسرانیها بنام اوخودنمائی کنند ودراوراق رنگین اورا درآغوش زیبا رویان وبساط گناهکاران جلوه دهند ؟!..

خیر ، یك ملت زنده اجازه نخواهد داد که مقدسات او آلت لهو ولعب و طرب وپلیدیهای اخلاقی خودی و بیگانه شود وخیام حکیم در فیلم های سینما ، روزگار خود را بسان کازانوای معروف یا راسپوتین بگذراند .

آنکه دررساله های جوابیهٔ خود حکمت باریتعالی را درخلقت عالم وانسان وتکلیف مردم را دربرابر خالق با عالیترین دقایق‌فلسفی دلچسب وروح پروربیان میکند ومصادر خیر وشر را از هم جدا میسازد و در علم کلی داد سخن میدهد و بنظام عالم و وجود اعتقاد دارد و مبداءِ و معاد را میشناسد این رباعی گفتهٔ او نیست :

گویند بهشت عدن با حور خوش است　　من میگویم که آب انگور خوش‌است
این نقدبگیر ودست ازآن نسیه بدار　　کاواز دهل شنیدن از دور خوش است

یا :

تا بتوانی تو خدمت رندان کن　　بنیاد نماز وروزه را ویران کن
بشنو سخن راست ز خیام‌عمر　　می‌میخورورهمیزن‌واحسان‌میکن

این افکار از دماغ یك قلندر حشیشی ، رند خراباتی که بخورد هرچه در میان آید وبگوید هرچه برزبان آید تراوش میکند ، وانتساب این‌آثاربه نصرة‌ـ الدین عمربن ابراهیم خیام نیشابوری ظلم تاریخ و ستمکاریهای سیاستهای مخرب است . »

تهران ـ فروردین ماه ۱۳۳۹　**دکتر جلال مصطفوی**

کتبی که برای تألیف این کتاب مورد مطالعهٔ نگارنده قرار گرفته‌است

۱ ــ جبر ومقابله خیّام	تالیف	آقای دکتر غلامحسین مصاحب
۲ ــ خلاصة‌الحساب	»	غیاث‌الدّین جمشید کاشانی
۳ ــ کتاب المختصرفی‌حساب‌الجبروالمقابلة	»	محمدبن موسی خوارزمی
٤ ــ مجموعهٔ‌رسائل‌البیرونی	»	ابوریحان بیرونی

۵ ــ ریاضیّات برای‌همه (Mathématique pour tous)

تألیف پرفسور Hogben

٦ ــ دورهٔ کتب جبرومقابلهٔ کلاسیك دبیرستانها .

۷ ــ کتاب‌مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها

غلطنامه

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۷	۲	بمشگلات	بمشکلات
۱۲	۲٤	امروز در در	امروز در
۱٥	۸	سر	سه
۲۰	۱۹	$x^{۲}$	$۲x$
۲۲	۲۳	$۲x + ۱٦$	$۲x = ۱٦$
۲٥	۱٦	$y = x + ۳$	$y = ۳ - x$
۲٥	۱۷	$(x + ۳)$	$(۳ - x)$
۲۷	۷	۷	۹
٤٦	۱٥	$x^{۲} = ۳x = ۲$	$x^{۲} = ۳x - ۲$
٤۸	داخل جدول	نصف‌عدداشیاءرا بکمرتبه بآن اضافه‌میکنیم	جذر رایکنوبت بنصف عدد اشیاء اضافه میکنیم
٥۱	۱۱	$۳٤x$	$۲٤x$
٥۱	۱٦	$x^{۲} + \frac{۹}{٤۹}۲۳ = ۲٤\frac{۹}{٤۹}x$	$x^{۲} + \left(\frac{۹}{٤۹} \times ۲۳\right) = ۲٤ \times \frac{۹}{٤۹}\ x$
٥۱	۱۸	$x^{۲}\,x\,٤\frac{۱۱}{٤۹}$	$x^{۲} + ٤\frac{۱۱}{٤۹}$
٥۳	۷	$b^{۲} - ٤ax > ۰$	$b^{۲} - ٤ac > ۰$
٥۳	۹	$b^{۲} + ٤ac = ۰$	$b^{۲} - ٤ac = ۰$
٥۳	۱٦	نقل میکند	حل میکند
٦٥	۱٦	ضریب	ضرب
٦٥	۲۱	$\sqrt[٦]{۷۲۹x^{۱۲} + ٦٤}$	$\sqrt[٦]{۷۲۹x^{۱۲} \times ٦٤}$
۹۰	۱٦	ویکه ریاضی دان فرانسوی	ویکه ریاضی دان آلمانی
۱۱۰	۹	حالت سوم $c < a$	حالت سوم $c > a$
۱۲۱	۷	$۲^{۱} - ۲$	$۲^{۱} = ۲$
۱۲۱	در حاشیه		Triangle arithmétique de Pascal صحیح است
۱۲۳	۹	طالبال	طالبان

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱	فهرست مختصری از آثار وابنیهٔ تاریخی ایران	شهریورماه ۱۳۰۴
۲	آثار ملی ایران (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	مهرماه ۱۳۰۴
۳	شاهنامه وتاریخ (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	شهریورماه ۱۳۰۵
۴	کشف دولوح تاریخی درهمدان (تحقیق پرفسور هرتسفلد ترجمه آقای مجتبی مینوی)	اسفندماه ۱۳۰۵
۵	سه خطابه در بارهٔ آثار ملی وتاریخی ایران (از آقایان فروغی ، هرتسفلد وهانی بال)	مهرماه ۱۳۰۶
۶	کشف الواح تاریخی تخت جمشید (پرفسور هرتسفلد)	اسفندماه ۱۳۱۲
۷	کنفرانس آقای فروغی راجع بفردوسی	بهمن ماه ۱۳۱۳
۸	تحقیق مختصر دراحوال و زندگانی فردوسی (بقلم فاطمه خانم سیاح)	۱۳۱۳
۹	تجلیل ابوعلی سینا در پنجمین دوره اجلاسیه یونسکو در فلورانس	اسفندماه ۱۳۲۹
۱۰	رسالهٔ جودیه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمود نجم آبادی)	۱۳۳۰
۱۱	رسالهٔ نبض ابن سینا (بتصحیح آقای سیدمحمدمشکوة استاد دانشگاه)	۱۳۳۰
۱۲	منطق دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقایان دکتر محمد معین وسید محمد مشکوة استادان دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۳	طبیعیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوة استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۴	ریاضیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای مجتبی مینوی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۵	الهیات دانشنامهٔ علائی ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمد معین استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۶	رساله نفس ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۷	رساله در حقیقت و کیفیت سلسله موجودات (به تصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۸	ترجمه رساله سرگذشت ابن سینا (از آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱۹	معراج نامه ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—
۲۰	رساله تشریح اعضاء ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—
۲۱	رساله قراضهٔ طبیعیات منسوب بابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاددانشگاه)	—
۲۲	ظفرنامه منسوب به‌ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	—
۲۳	رساله کنوزالمعزمین ابن‌سینا (بتصحیح آقای جلال‌الدین همائی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۴	رساله معیارالعقول ـ جرثقیل ـ ابن‌سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۵	رساله حی‌بن یقظان ابن‌سینا با ترجمه شرح فارسی آن از یکی از معاصران ابن سینا (بتصحیح آقای هانری کربن)	۱۳۳۱
۲۶	جشن‌نامه ابن سینا (مجلد اول ـ سرگذشت و تألیفات و اشعار و آراء ابن‌سینا) تألیف آقای دکتر ذبیح‌الله صفا استاددانشگاه	۱۳۳۱
۲۷	ترجمه مجلد اول جشن‌نامه بفرانسه (بوسیله آقای سعید نفیسی استاددانشگاه)	۱۳۳۱
۲۸	ترجمهٔ اشارات و تنبیهات) بتصحیح آقای دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۲۹	پنج رسالهٔ فارسی وعربی ازابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۳۰	آثارتاریخی کلات وسرخس (تألیف آقای مهدی بامداد)	بهمن‌ماه ۱۳۳۳
۳۱	جشن‌نامه ابن‌سینا مجلددوم (حاوی نطقهای فارسی اعضاء کنگره ابن سینا)	۱۳۳۴
۳۲	جشن‌نامه ابن سینامجلد سوم (کتاب المهرجان لابن‌سینا) حاوی نطقهای عربی اعضای کنگره ابن‌سینا	۱۳۳۵
۳۳	جشن‌نامه ابن‌سینا مجلدچهارم (شامل خطابه‌های اعضای کنگره ابن‌سینابزبانهای آلمانی وانگلیسی وفرانسوی)	۱۳۳٤
۳٤	نیروهای بزرگ نادرشاه (بقلم سرلشکرغلامحسین مقتدر)	۱۳۳۹